LEIPZIG
GRADUATE SCHOOL
OF MANAGEMENT

Dissertation

Theoretische Fragestellungen zur Bewertung von Unternehmen

Alexander D. F. Lahmann

E-Mail: alexander.lahmann@hhl.de

Abstract
Die vorliegende Dissertationsschrift beschäftigt sich mit theoretischen Fragestellungen der Finanzwissenschaft im Bereich des Asset Pricing und im Detail der Unternehmensbewertung. Dabei wird sowohl auf Problemstellungen der akademischen und praxisnahen Forschung eingegangen. Der erste Artikel beschäftigt sich mit der Fragestellung welche Implikationen die Annahme einer arithmetischen Brownschen Bewegung auf bestimmte Aspekte der Unternehmensbewertung hat. Es folgen drei Artikel die sich auf unterschiedlicher Weise mit der Zinsschrankenregelung auseinandersetzen. Die darauf folgenden zwei Artikel behandeln hauptsächlich die Modellierung von Insolvenz im Rahmen der Unternehmensbewertung bei Annahme verschiedener Finanzierungspolitiken. Der achte Artikel geht näher auf die Thematik der empirischen Bestätigung bestimmter Kapitalstrukturtheorien ein. Die Dissertation schließt mit einem Artikel zu wichtigen Parametern für die Unternehmensbewertung.

LEIPZIG
GRADUATE SCHOOL
OF MANAGEMENT

Theoretische Fragestellungen zur Bewertung von Unternehmen

Kumulative Inauguraldissertation zur Erlangung des

Doktorgrades der Wirtschaftswissenschaften (Dr. rer. oec.)

an der
HHL Leipzig Graduate School of Management
Jahnallee 59, 04109 Leipzig, Deutschland

vorgelegt von

Dipl.-Vw. Alexander D. F. Lahmann

Leipzig, am 28. September 2012

Betreuer & Erstgutachter:

Prof. Dr. Bernhard Schwetzler, CVA

Lehrstuhl für Finanzmanagement und Banken

Zweitgutachter:

Prof. Dr. Henning Zülch

Lehrstuhl für Rechnungswesen, Wirtschaftsprüfung und Controlling

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Bei der Auswahl und Auswertung des Materials sowie bei der Herstellung des Manuskripts habe ich keine Unterstützungsleistungen von anderen Personen erhalten. Außer der für die jeweiligen Artikel namentlich gekennzeichneten Koautoren waren keine weiteren Personen an der geistigen Herstellung der vorliegenden Arbeit beteiligt. Dritte haben von mir weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer Prüfungsbehörde vorgelegt. Bereits in wissenschaftlichen Fachzeitschriften veröffentlichte Artikel sind entsprechend gekennzeichnet. Mit der vorliegenden Arbeit wurde an anderen wissenschaftlichen Hochschulen noch kein Promotionsverfahren in Wirtschaftswissenschaften beantragt.

Alexander Lahmann 28. September 2012

Vorwort

Die vorliegende kumulative Dissertationsschrift wurde nach der Promotionsordnung der HHL Leipzig Graduate School of Management vom 03.12.2009 angefertigt. Im September 2009 wurden Empfehlungen zur Regelung der Rahmenbedingungen einer kumulativen Promotion seitens des Promotionsausschusses erlassen. Aufgrund der Art einer kumulativen Dissertationsschrift beinhaltet diese unterschiedliche, aber dennoch thematisch zusammenhängende, teils in Fachzeitschriften veröffentlichte und nicht-veröffentlichte sowie im Begutachtungsprozess befindliche Artikel.

Zu den jeweiligen Kapiteln der Dissertationsschrift ist das Folgende anzumerken:

1. Kapitel

In diesem Bereich wird ein inhaltlicher Überblick gegeben und der thematische Zusammenhang der einzelnen Artikel erläutert. Beginnend mit einer tabellarischen Übersicht der Artikel, die zum Teil in Ko-Autorenschaft angefertigt wurden, kann hier der jeweilige Eigenanteil entnommen werden. Im Anschluss folgen die Ableitungen der Forschungsfragen und eine inhaltliche Zusammenfassung der einzelnen Beiträge.

2.-9. Kapitel

Dieser als Hauptteil der Dissertationsschrift zu bezeichnende Abschnitt setzt sich aus acht Fachartikeln zusammen.

Danksagung

Die einzelnen Fachbeiträge der vorliegenden Dissertationsschrift sind während meiner Zeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Finanzmanagement und Banken der HHL Leipzig Graduate School of Management entstanden. Ich möchte an dieser Stelle die Gelegenheit nutzen all denen zu danken, die mich während meiner Zeit unterstützten.

Allen voran danke ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Bernhard Schwetzler. Durch stetig neue Herausforderungen hat er mir dabei geholfen über meine Grenzen hinauszuwachsen. So konnte ich viele Erfahrungen sowohl im theoretischen als auch im praxisnahen Forschungsbereich sammeln. Ein herzlicher Dank gebührt auch Herrn Prof. Dr. Henning Zülch für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Ganz besonders danken möchte ich meinem Kollegen Dipl.-Math. (FH) Sven Arnold, der mir während der gemeinsamen Zeit am Lehrstuhl stets zur Seite stand. Die freiheitliche Arbeitsatmosphäre sowie die gemeinsamen fachlichen Diskussionen schufen ein angenehmes Arbeitsumfeld. Herrn Felix Brüsewitz (BSc.) und Herrn Daniel Winkler (BSc.) möchte ich für Ihre Unterstützung und gewissenhaften Durchsichten danken. Des Weiteren bin ich Frau Dipl.-Kffr. Alexandra Holzhey, Frau Dipl.-Kffr. Christin Rudolph, Herrn Dipl.-Kfm. Markus Brendel und anderen Kollegen verbunden für die gemeinsame Zeit am Lehrstuhl.

Meiner Freundin und meinen Eltern möchte ich ganz besonders für Ihre ununterbrochene Unterstützung danken und Ihnen die vorliegende Arbeit widmen.

Inhalt

1 Thematische Einordnung und Forschungsbeitrag

Inhaltsverzeichnis

1.1 Publikationsübersicht

In der theoretischen Literatur zur Bewertung von Unternehmen finden sich mannigfaltige Ansätze deren Verschiedenartigkeit vor Allem auf die getroffenen Annahmen und berücksichtigten Einflussgrößen zurückgeführt werden kann. Die vorliegende Dissertationsschrift beinhaltet die in Tabelle 1.1 aufgeführten Beiträge, die sich mit finanzwirtschaftlichen Fragestellungen der Unternehmensbewertung und des Asset Pricing beschäftigen. Dieser Tabelle kann auch der jeweilige Anteil der Eigenleistung und die Ko-Autorenschaft entnommen werden.

1.2 Einordnung in die Literatur und Motivation der Publikationen

Der nun folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Einordnung der vorgenannten Beiträge in die Literatur sowie der Darstellung ihrer wissenschaftlichen Motivation. Alle Artikel der Dissertationsschrift haben als Ausgangspunkt die Analyse bestimmter Einflussgrößen auf den Unternehmenswert. Die vorliegenden Beiträge verwenden hierzu vorwiegend modelltheoretische aber auch statistische Methoden. Insbesondere ist darauf hinzuweisen, dass die modelltheoretischen Analysen auf Ergebnisse des Discounted Cash Flow (DCF) Ansatzes zurückgreifen und durch Überlegungen aus der stochastischen Finanzierungstheorie[1] ergänzt werden. Aus diesem Zusammenspiel lassen sich strukturelle Modelle ableiten, die es ermöglichen komplexe Zusammenhänge zu analysieren.

In der Unternehmensbewertung wie auch im gesamten Bereich des Asset Pricing wird zu Beginn der Modellanalyse eine Annahme über die Modellierung des exogen gegebenen Vermögensgegenstandes getroffen. Als Beispiele für exogen gegebene Vermögensgegenstände können u.a. der Unternehmenswert oder Ergebnisgrößen wie

[1] Oft auch als stochastic calculus bezeichnet.

Titel	Ko-Autoren	Eigenanteil	Zeitschrift
The Arithmetic Brownian Motion in Corporate Valuation	-	100%	Working Paper
Die Bewertung der Zinsschranke	Arnold, Sven	50%	Im Begutachtungsprozess bei der Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung
Zinsschranke, Unternehmens-bewertung und APV-Ansatz - eine Anmerkung zum Beitrag von Förster/Stöckl/Brenken (ZfB 2009, S. 985 ff.)	Arnold, Sven Schwetzler, Bernhard	33%	arqus Diskussionsbeitrag Nr. 116
Der Einfluss der “Zinsschranke” auf den Unternehmenswert - eine Anmerkung	Arnold, Sven Schwetzler, Bernhard	33%	Veröffentlicht in Corporate Finance.biz (5/2011, S. 293-299)
Tax Shield, Insolvenz und Zinsschranke	Arnold, Sven Schwetzler, Bernhard	33%	Working Paper (hier eine deutlich überarbeitete Version zur veröffentlichten Version in arqus Diskussionsbeitrag Nr. 113)
Tax Shield, Insolvenzwahr-scheinlichkeit und Zinsschranke - eine empirische Analyse	Arnold, Sven Schwetzler, Bernhard	33%	Veröffentlicht in Die Wirtschaftsprüfung (6/2012, S. 324-337)
Zur Überprüfung von Kapital-strukturtheorien in einer von Krisen geprägten Zeit	Arnold, Sven Jens Reinstädt	33%	Veröffentlicht in Corporate Finance.biz (8/2011, S. 449-458)
Multiples und Beta-Faktoren für deutsche Branchen - Erläuterungen zu den Kapitalmarktdaten von www.finexpert.info und CORPORATE FINANCE	Arnold, Sven Schwetzler, Bernhard	33%	Veröffentlicht in Corporate Finance.biz (7/2011, S. 430-434)

Tabelle 1.1: Publikationsübersicht

das EBIT, EBITDA und die freien Cashflows angesehen werden.[2] Die vorgenannten Variablen sind aus Perspektive des Asset Pricing von zentraler Bedeutung. Da diese Größen meistens nicht als deterministisch angesehen werden können, werden zur Modellierung (zukünftiger) Ausprägungen meistens stochastische Prozesse herangezogen. Die Auswahl des stochastischen Prozesses hat maßgeblichen Einfluss auf die Ergebnisse der Modellanalyse. In einigen kürzlich erschienen Artikeln wird zur Modellierung eine arithmetische Brownsche Bewegung angenommen ohne die Auswirkungen einer solchen Annahme hinreichend zu analysieren.[3] Deswegen analysiert der erste Beitrag die Auswirkungen auf die Bestimmung des Unternehmenswertes wenn als stochastischer Prozess eine arithmetisch Brownsche Bewegung angenommen wird. Dieser Beitrag verwendet sowohl Techniken aus der stochastischen Finanzierungstheorie als auch solche der DCF Methodik.

Die modelltheoretische Ableitung des Wertes eines verschuldeten Unternehmens ist spätestens seit den beiden Aufsätzen von *Modigliani* und *Miller* (1958) und (1963) ein zentraler Untersuchungsgegenstand in der Finanzwirtschaft. Insbesondere wird der Effekt der Kapitalstruktur und bestimmter Regularien der Besteuerung auf den Unternehmenswert betrachtet.[4]

Der zweite Beitrag beschäftigt sich mit der Analyse der sogenannten Zinsschranke, die mit der Unternehmenssteuerreform 2008 in Deutschland eingeführt wurde. Die Zinsschranke beschränkt bei Eintritt bestimmter Voraussetzungen die steuerliche

[2] In zahlreichen Aufsätzen findet sich direkt zu Beginn des Modells eine Annahme über die Modellierung des exogen gegebenen Vermögensgegenstandes. *Black* und *Scholes* (1973), S. 645; *Merton* (1973), S. 162 und *Leland* (1994), S. 1217 modellieren den Unternehmenswert während bspw. *Arzac* und *Glosten* (2005), S. 455. *Kruschwitz* und *Löffler* (2006), S. 14 ff. oder auch *Goldstein*, *Ju* und *Leland* (2001), S. 489 Ergebnisgrößen wie das EBIT, EBITDA oder die freien Cashflows modellieren.

[3] Vgl. bspw. *Alexander*, *Mo* und *Stent* (2012), *Bank* und *Wibmer* (2011) oder auch *Streitferdt* (2010).

[4] Um nur einige Artikel zu nennen, die den Effekt fremdfinanzierungsbedingter Steuervorteile auf den Unternehmenswert zu quantifizieren versuchen, vgl. bspw. *Miles* und *Ezzell* (1980), *Miles* und *Ezzell* (1985), *Myers* (1974), *Arzac* und *Glosten* (2005) und *Massari*, *Roncaglio* und *Zanetti* (2007). Im Gegensatz dazu gibt es auch Artikel die auf Basis struktureller Modelle die Kapitalstruktur ableiten, vgl. hierzu *Leland* (1994), *Leland* und *Toft* (1996) oder auch *Goldstein*, *Ju* und *Leland* (2001).

Abzugsfähigkeit der Zinszahlungen aus Fremdfinanzierung. Im Rahmen der vorliegenden modelltheoretischen Analyse soll untersucht werden, ob und welchen Werteffekt die Möglichkeit des Greifens der Zinsschranke auf den Unternehmenswert hat. Der Fokus der Analyse liegt vor Allem auf der Herleitung einer geschlossenen Bewertungsgleichung im Rahmen des DCF-Ansatzes, der die strenge Pfadabhängigkeit der Zinsschranke berücksichtigt und es ermöglicht ihren Werteinfluss zu quantifizieren.

Mit der Einführung der Zinsschranke sind eine Reihe von Schriften erschienen, die sich mit ihrer Wirkungsweise und ihrem Einfluss beschäftigten.[5] Der Beitrag von *Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009) beschäftigt sich mit dem Effekt der Zinsschranke auf den Unternehmenswert im Rahmen des Adjusted Present Value (APV) Ansatzes, der der DCF-Methodologie zuzuordnen ist. Der im vorgenannten Aufsatz durchgeführten Analyse widmet sich der dritte Beitrag, der als eine Replik zu betrachten ist. Die darin angewandte Vorgehensweise und die hergeleiteten Bewertungsgleichungen weisen eklatante Schwachstellen auf. Die Replik stellt diese Fehler dar und korrigiert diese.[6]

Der vierte Beitrag beschäftigt sich mit den Neuerungen der Unternehmenssteuerreform 2008, die im Jahr 2009 durchgeführt wurden. Von besonderem Interesse ist hier der EBITDA-Vortrag, der den Einfluss der Zinsschranke verringern soll. Diese Neuerung verschärft die bereits bestehende strenge Pfadabhängigkeit der Zinsschrankenregelung. Der Beitrag zeigt wie diese Pfadabhängigkeit in die Bewertungsgleichungen zu implementieren ist.

Fremdfinanzierung hat durch die steuerrechtliche Abzugsfähigkeit der Zinsaufwendungen zunächst einen positiven Effekt auf den Unternehmenswert. Bei genauerer Betrachtung sind aber auch Kosten aufgrund einer möglichen Unternehmensinsolvenz in das Kalkül einzubeziehen. Der fünfte Beitrag zeigt den Werteinfluss dieses

[5] Hierzu zählen neben Weiteren *Bach* und *Buslei* (2009), *Kniest* (2008) und *Blaufus* und *Lorenz* (2009).

[6] Eine Annahme der Replik wurde aufgrund administrativer Gründe seitens der Zeitschrift für Betriebswirtschaft verweigert. Ein Schreiben der Autoren des Beitrages *Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009) liegt uns vor, der zu unseren Einwänden Stellung nimmt und Aspekte der Replik annimmt.

häufig in der Literatur betrachteten Themengebietes[7] auf und zeigt Interdependenzen zur Zinsschranke und anderen zentralen Unternehmenskennzahlen auf. Dazu werden Techniken des DCF-Ansatzes mit denen der stochastischen Finanzierungstheorie, z.B. struktureller Modelle, kombiniert. Um das auf dieser Weise entwickelte Modell zu vervollständigen und realitätsnahe Schlüsse ziehen zu können, wird es basierend auf empirischen Daten deutscher Branchen im sechsten Beitrag analysiert. Als Ergebnis können die durchschnittlichen Werteffekte möglicher Unternehmensinsolvenzen und der Zinsschranke auf Industrieebene gewonnen werden.

Die Kapitalstruktur eines Unternehmens ist wie bereits genannt von zentraler Bedeutung für den Unternehmenswert. Jedoch gibt es aus theoretischer Perspektive mehr Erklärungsansätze für das Vorliegen einer bestimmten Kapitalstruktur als das Abwägen zwischen Nutzen und Kosten der Verschuldung (Trade-Off Theorie). Neben dieser existieren eine Reihe von weiteren Erklärungsansätzen für die Wahl der Kapitalstruktur. Zu den prominentesten gehören die Pecking-Order und die Market-Timing Theorie. Erstere versucht die Kapitalstruktur durch Bevorzugung von Fremdkapital gegenüber Eigenkapital seitens des Managements zu erklären. Letztere geht hingegen davon aus, dass die Kapitalstruktur davon abhängt, welche Finanzierungsmöglichkeiten am Kapitalmarkt gerade günstiger bewertet sind. Wie Unternehmen ihre Kapitalstruktur in Realität wählen, kann anhand empirischer Tests geprüft werden. Dieser Frage widmet sich der siebte Artikel und analysiert dies für den Zeitraum 1999-2009. Dies lässt auch Rückschlüsse auf mögliche Kapitalstrukturänderungen während der Finanzkrise zu.

Der achte Beitrag stellt praktische Implikationen bzw. Anwendungen bestimmter

[7] *Robichek* und *Myers* (1966) gehen erstmalig auf Basis des *Modigliani* und *Miller* Modells auf den Werteinfluss einer Insolvenz bei steigender Fremdfinanzierung ein. Weitere Modellerweiterung wie *Stiglitz* (1969) und *Brennan* und *Schwartz* (1978) beziehen Insolvenz mit ein. Für eine erste Betrachtung einer Unternehmensinsolvenz im Rahmen von strukturellen Modellen vgl. *Merton* (1974). Es folgen weitere Modelle wie *Leland* (1994), *Leland* und *Toft* (1996) oder auch *Goldstein*, *Ju* und *Leland* (2001). In der DCF-Theorie wird die Berücksichtigung von Insolvenz und der Einfluss auf den Wert des Tax-Shield unter bestimmten Maßgaben seit *Myers* (1974), gefolgt von Artikeln wie *Sick* (1990) für marktwertorientierte Finanzierungspolitik, *Homburg*, *Stephan* und *Weiß* (2004) und *Kruschwitz*, *Lodowicks* und *Löffler* (2005) und Anderen, betrachtet.

Aspekte der Unternehmensbewertung, wie die Ableitung von Betafaktoren gemäß dem CAPM und von Multiplikatoren, dar. Des Weiteren gibt dieser Beitrag einen Einblick in die am Lehrstuhl für Finanzmanagement und Banken der HHL Leipzig Graduate School of Management verrichteten praktischen Tätigkeiten, die für die vierteljährliche Veröffentlichung von Kapitalmarktdaten für die Fachzeitschrift Corporate Finance biz und andere notwendig waren.

Literaturverzeichnis

Alexander, David Richard/ Mo, Mengjia und *Stent, Alan Fraser* (2012), Arithmetic Brownian motion and real options, in: European Journal of Operational Research, Jg. 219, S. 114–122.

Arzac, Enrique R. und *Glosten, Lawrence R.* (2005), A Reconsideration of Tax Shield Valuation, in: European Financial Management, Jg. 11, S. 453–461.

Bach, Stefan und *Buslei, Hermann* (2009), Empirische Analysen zur Zinsschranke auf Grundlage von Handelsbilanzdaten, in: DIW Research Notes 30, S. 1–38.

Bank, Matthias und *Wibmer, Katrin* (2011), Start-up firm valuation: A real options approach, in: Working Paper, URL `http://ssrn.com/abstract=1928710`.

Black, Fischer und *Scholes, Myron* (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, in: Journal of Political Economy, Jg. 81, S. 637–654.

Blaufus, Kay und *Lorenz, Daniela* (2009), Wem droht die Zinsschranke? Eine empirische Untersuchung zur Identifikation der Einflussfaktoren, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 79, S. 503–526.

Brennan, Michael J. und *Schwartz, Edwardo S.* (1978), Corporate Income Taxes, Valuation, and the Problem of Optimal Capital Structure, in: Journal of Business, Jg. 51, S. 103–114.

Förster, Heinrich H./ Stöckl, Stefan und *Brenken, Henner* (2009), Die Bedeutung der Zinsschranke für die Bewertung von Tax Shields in einem modifizierten APV-Ansatz unter Verwendung einer entsprechend angepassten Eigenkapitalkosten-Reaktionshypothese, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 79, S. 985–1018.

Goldstein, Robert/ Ju, Nengjiu und *Leland, Hayne* (2001), An EBIT-Based Model of Dynamic Capital Structure, in: Journal of Business, Jg. 74, S. 483–512.

Homburg, Carsten/ Stephan, Jörg und *Weiß, Matthias* (2004), Unternehmensbewertung bei atmender Finanzierung und Insolvenzrisiko, in: Die Betriebswirtschaft, Jg. 64, S. 276–295.

Kniest, Wolfgang (2008), Die Zinsschranke bei der Unternehmensbewertung: ein Fallbeispiel, in: BewertungsPraktiker, Jg. 2, S. 2–8.

Kruschwitz, Lutz/ Lodowicks, Arnd und *Löffler, Andreas* (2005), Zur Bewertung insolvenzbedrohter Unternehmen, in: Die Betriebswirtschaft, Jg. 65, S. 221–236.

Kruschwitz, Lutz und *Löffler, Andreas* (2006), Discounted Cash Flow - A Theory of the Valuation of Firms, 1 Aufl., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester.

Leland, Hayne E. (1994), Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure, in: Journal of Finance, Jg. 49, S. 1213–1252.

Leland, Hayne E. und *Toft, Klaus Bjerre* (1996), Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads, in: The Journal of Finance, Jg. 51, S. 987–1019.

Massari, Mario/ Roncaglio, Francesco und *Zanetti, Laura* (2007), On the Equivalence between the APV and the wacc Approach in a Growing Leveraged Firm, in: European Financial Management, Jg. 14, S. 152–162.

Merton, Robert C. (1973), Theory of rational option pricing, in: Bell Journal of Economics and Management Science, Jg. 4, S. 141–183.

Merton, Robert C. (1974), On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, in: Journal of Finance, Jg. 29, S. 449–470.

Miles, James A. und *Ezzell, John R.* (1980), The Weighted Average Cost of Capital, Perfect Capital Markets, and Project Life: A Clarification, in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, Jg. 15, S. 719–730.

Miles, James A. und *Ezzell, John R.* (1985), Reformulating Tax Shield Valuation: A Note, in: Journal of Finance, Jg. 40, S. 1485–1492.

Modigliani, Franco und *Miller, Merton H.* (1958), The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment, in: American Economic Review, Jg. 48, S. 261–297.

Modigliani, Franco und *Miller, Merton H.* (1963), Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: A Correction, in: American Economic Review, Jg. 53, S. 433–443.

Myers, Stewart C. (1974), Interactions of Corporate Financing and Investment Decisions-Implications for Capital Budgeting, in: Journal of Finance, Jg. 29, S. 1–25.

Robichek, Alexander A. und *Myers, Stewart C.* (1966), Problems in the Theory of Optimal Capital Structure, in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, Jg. 1, S. 1–35.

Sick, Gordon A. (1990), Tax-adjusted discount rates, in: Management Sience, Jg. 36, S. 1432–1450.

Stiglitz, Joseph E. (1969), A Re-Examination of the Modigliani-Miller Theorem, in: American Economic Review, Jg. 59, S. 784–793.

Streitferdt, Felix (2010), Die Bewertung von Verlustvorträgen und Tax Shields auf arbitragefreien Märkten, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 80, S. 1041–1074.

2 The Arithmetic Brownian Motion in Corporate Valuation

Inhaltsverzeichnis

The Arithmetic Brownian Motion in Corporate Valuation

Alexander Lahmann*

* Dipl.-Vw. Alexander D. F. Lahmann, Chair of Financial Management, HHL Leipzig Graduate School of Management, Jahnallee 59, 04109 Leipzig, Email: Alexander.Lahmann@hhl.de, Tel.: (0341)9851665, Fax: (0341)9851689. The paper is available at `http://ssrn.com/abstract=2150667`.

Abstract In this paper we expand the Discounted Cash Flow (DCF) framework for the valuation of an unlevered firm when the free cash flows are modeled by an arithmetic Brownian motion (ABM). We approximate the ABM by a binomial lattice in order to keep the typical time discrete framework of the DCF methodology. In contrast to the typical multiplicative process assumption for modeling earnings figures and free cash flows the ABM implied additive process admits for possible negative free cash flow values and grows by an absolute amount rather than a growth rate. But this process assumption has important implications on firm valuation. After the binomial lattice approximation we derive valuation formulas based upon an additive process assumption, touch the topic of the determination of CAPM consistent cost of capital and show a possible equivalence between the multiplicative and additive process assumption. We finish our analysis by calculating some numerical examples.

2.1 Introduction

Academic research in corporate valuation and capital structure incorporates techniques originated in option pricing theory. One of the most important assumptions (if not the most important assumption) is the modeling of the underlying variables such as firm value, EBIT or EBITDA, and cash flows.

Many results in these fields of research are driven by this assumption. Having its origins in the seminal works of *Modigliani* and *Miller* (1958) and (1963), most research papers of the discounted cash flow (DCF) methodology implicitly or explicitly state an assumption on the modeling of the underlying variable, such as the free cash flows. These free cash flows are usually assumed to be random variables following a special stochastic process. For the first time in the DCF literature *Arzac* and *Glosten* (2005) explicitly discuss the process assumption made in this literature stream and examine their implications on the firm value. They show in this particular case the effect on the tax shield value using the adjusted present value (APV) approach. The most common assumption in DCF theory is to model the free cash flows of the unlevered firm FCF^U by a discrete "multiplicative" stochastic process with a (deterministic) growth factor g_t,

$$E\left[FCF^U_{t+1}\right] = (1+g_t)\cdot FCF^U_t \tag{2.1.1}$$

Based upon this assumption *Kruschwitz* and *Löffler* (2006) (re-)derive the DCF valuation formulas and discuss important conditions for their mathematical derivation. The analysis is continued by *Laitenberger* and *Löffler* (2006) who uncover implicit assumptions on the free cash flow distribution in a multiperiod valuation setting. They argue that the process assumption of equation (2.1.1) is the discrete analogue of a geometric Brownian motion (GBM). They have proven that the assumption of a GBM as underlying process implies for the cost of capital to be deterministic, conditional expected returns.

After its appearance in the seminal papers of *Black* and *Scholes* (1973) and *Mer-*

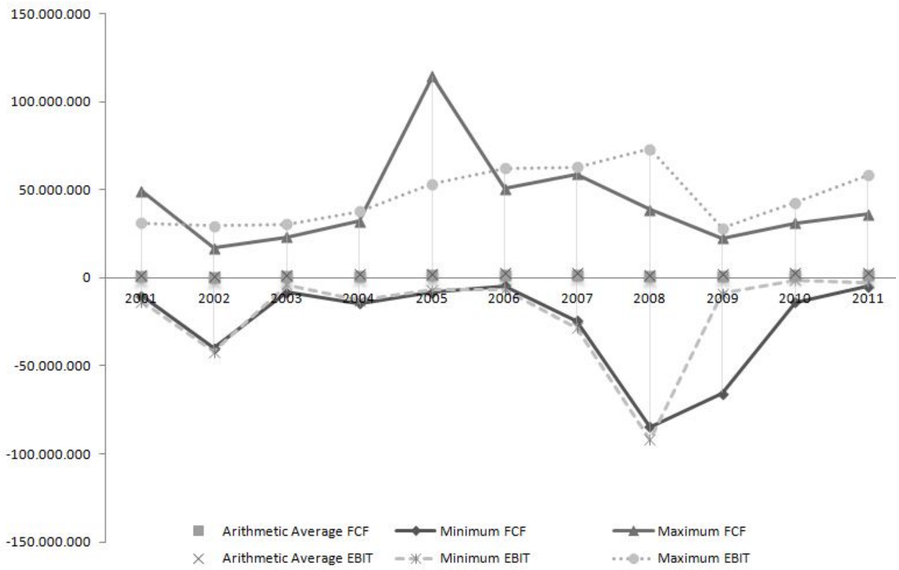
ton (1973b), the GBM has gained popularity in many finance related research areas, e.g. in capital structure theory. Since the values of a GBM cannot become negative, the GBM is a convenient assumption for modeling the firm or equity value of a limited liability company. Using this assumption *Leland* (1994) derives closed-form solutions for the optimal capital structure under different conditions. *Goldstein*, *Ju* and *Leland* (2001) and *Hackbarth*, *Hennesy* and *Leland* (2007) extend this approach deriving an EBIT-based setting, where the EBIT is directly modeled by a GBM. *Grinblatt* and *Liu* (2008) calculate the tax shield for different classes of debt policies where the free cash flows are also modeled by a GBM.

While the GBM is a common assumption throughout the financial literature one of its biggest shortcomings when applied to modeling earnings figures is that it cannot become negative. In reality EBIT/EBITDA and cash flow figures can become negative (see figure 2.1). That is one of the reasons why a recent trend in this field of research is the use of alternative stochastic processes as the arithmetic Brownian motion (ABM). In contrast to a GBM an ABM allows the underlying to become negative. *Streitferdt* (2010) applied a "special version" ABM according to *Cox* and *Ross* (1976) to the valuation of tax loss carry forwards. A recent study on start-up firm valuation by *Bank* and *Wibmer* (2011) uses an ABM to account for negative earnings and their implications on waiting-to-invest real options for a start-up firm. *Alexander*, *Mo* and *Stent* (2012) apprehended the application of an ABM to a project valuation using real options. To account for negative and positive project values they assume a second diffusion for modeling project related cash in- and outflows. Another alternative for modeling negative earnings is to assume more than one stochastic process.[1] But those models usually are lacking of closed form solutions.

The literature stream dealing with modeling negative free cash flows suggests using the ABM but does not discuss the implications on firm valuation even though they use some techniques from the DCF method. For example, *Alexander*, *Mo* and *Stent* (2012) simply ignore this topic by assuming infinite cash in- or outflows

[1] See for example *Schwartz* and *Moon* (2000) and (2001).

Figure 2.1: EBIT Development of S&P 500 Companies (2001-2011).



Note: Figure 2.1 depicts the free cash flow and EBIT minimum, maximum and the arithmetic average for the years 2001 - 2011 of all companies listed in the S&P 500 in T USD. Record date for the S&P listing is the 7-24-2012. The free cash flows are calculated by EBIT - Income Tax + Depreciation - Incr./Decr. in Working Capital - Capital Expenditure. All data items are taken from Thomson/Reuters Datastream. The grey solid line (triangle tags) is the yearly maximum EBIT of a company listed in the S&P 500, the black solid line (diamond tags) the minimum EBIT and the grey square the corresponding arithmetic average of all S&P 500 listed companies. The light grey dotted line (circle tags) is the corresponding yearly maximum free cash flow, the light grey dashed line (star tags) the minimum and the cross tags the arithmetic average of all S&P 500 listed companies.

depending on the algebraic sign of the free cash flows. The main contribution of this article is the analysis of the implications made by assuming an ABM for modeling free cash flows. In addition, our approach is different to the existing literature: We first show how to approximate an ABM by a binomial lattice and continue to derive valuation formulas. Furthermore, we show possible equivalences to the standard DCF formulas based on the multiplicative process assumption and discuss some inconsistencies which result from the use of an ABM.

In section 2.2 we give an overview of stochastic modeling of earnings figures in corporate valuation and show how to derive a consistent link between the standard multiplicative process assumption in the DCF framework and the GBM. This derivation is based upon the approach of *Nelson* and *Ramaswamy* (1990) to approximate generalized Brownian motions by binomial lattices. In addition, we apply the approach of *Nelson* and *Ramaswamy* (1990) on the ABM and derive the implied additive process assumption. Section 2.3 discusses the application of the ABM implied discrete additive process on firm valuation. Furthermore, we show in brief some interesting implications of the ABM on the derivation of the corresponding risk-neutral probabilities and derive the equivalence of the additive and multiplicative process in the DCF framework. In section 2.4 we apply the derived framework on a numerical example. A summary and a discussion for the application in practical corporate valuation is given in section 2.5.

2.2 Stochastic modeling of earnings figures

Let $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ be a probability space, where Ω is the sample space, $\mathcal{F}$ is the σ-algebra of subsets of Ω and $\mathbb{P}$ is the real (or subjective) probability measure. $\mathbb{Q}$ defines the risk-neutral probability measure that is equivalent to the subjective probability measure $\mathbb{P}$.[2] The time interval $[0, T]$ can be partitioned in a sequence of n periods with equal length $\Delta t = \frac{T}{n}$.[3] This implies discrete time intervals $t + i$, with $i = 0, 1, 2, ..., n$. The available information at time t, with $t \in [0, T]$, is denoted by the filtration $\mathcal{F}_t$.

Consider a firm which has a value V_t in t. The firm's operations realize (at the end of each period) an uncertain earnings figure like the EBIT, EBITDA, or the free cash flows. A well-known assumption in capital structure theory literature is to model the underlying earnings figure by a GBM. In the case of firm valuation via a discounted cash flow (DCF) model it is useful to model the free cash flows (FCF)

[2] For an extensive review of equivalent risk-neutral probabilities see *Shreve* (2004).

[3] It is useful to chop the time interval in n equal pieces. These (discrete) periods can be interpreted as years in order to account for the publishing of annual statements.

directly by

$$dFCF_t = \mu_t\ FCF_t\ dt + \sigma_t\ FCF_t\ dW_t, \qquad (2.2.1)$$

where μ_t is the drift rate, σ_t the standard deviation of returns and W_t a Brownian motion (Wiener process) on the above defined probability space. Let $\mathcal{F}_t$ be a filtration for this Brownian motion. μ_t and σ_t are allowed to be adapted processes.

While a GBM is completely in line with the explicit or implicit assumption about the stochastic free cash flow process made in the DCF literature[4] it has the shortcoming that the free cash flow values cannot become negative. However, in practice, free cash flows can become negative and may instead follow some other stochastic process. One possible solution to model earnings figures could be the ABM.[5]

The arithmetic Brownian motion is a type of Ornstein-Uhlenbeck process where the drift and the standard deviation have absolute values (not necessarily depending on the current level of the underlying variable as the free cash flows). The most general version is shown in equation (2.2.2):

$$dFCF_t = \mu_t\ dt + \sigma_t\ dW_t, \qquad (2.2.2)$$

where μ_t is the absolute growth in free cash flows and σ_t is the absolute standard deviation. Again W_t is a Brownian motion on the probability space $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ and $\mathcal{F}_t$ an associated filtration. Note that in this general formulation μ_t and σ_t are allowed to be adapted processes, with $\sigma_t > 0$, for all $t \in [0, T]$.[6] In the case of constant μ and σ equation (2.2.2) has an expected value of $E[FCF_T] = FCF_t +$

[4]See *Kruschwitz* and *Löffler* (2006) or *Laitenberger* and *Löffler* (2006) for an explicit formulation of this assumption and *Arzac* and *Glosten* (2005) for an implicit formulation. Furthermore, a GBM modeled underlying is perfectly in line with the Intertemporal-CAPM (ICAPM) according to *Merton* (1973a).

[5]See for a recent application on real options *Alexander*, *Mo* and *Stent* (2012).

[6]Adapted processes allow for time varying growth and standard deviation. In case of a start-up firm, it is reasonable to model a declining growth process $d\mu_t = \kappa_\mu\left[\overline{\mu} - \mu_t\right]dt + \sigma_{\text{rev}} dW_{\mu,t}$, where κ_μ is the speed of convergence to the long term mean of the growth $\overline{\mu}$, σ_{rev} the volatility of the growth and $dW_{\mu,t}$ another Brownian motion. See for example *Schwartz* and *Moon* (2001), p. 9.

$\mu(T-t)$ and variance $Var[FCF_t] = \sigma^2(T-t)$.[7] One common variation of an ABM combines a GBM like drift rate with an absolute standard deviation. This variation was originally proposed by *Cox* and *Ross* (1976) and is given by $dFCF_t = \mu FCF_t dt + \sigma dW_t$. This formulation has the advantage to use a growth rate and combine it with an absolute standard deviation.[8] Note that this ABM version still faces the same difficulties as the general version given in equation (2.2.2).

2.2.1 A general approach to binomial lattices

The main focus of this section is to introduce the binomial lattice approach developed by *Cox*, *Ross* and *Rubinstein* (1979) (CRR) for modeling stochastic processes in discrete time. The CRR binomial lattice approach is a simplification of the option pricing model by *Black* and *Scholes* (1973) and *Merton* (1973b) and converges weakly to the GBM as $\Delta t \to 0$. In addition, the CRR-model is intuitively accessible and does not demand deeper insights in stochastic differential equations. Apart from its original application on the valuation of stock options the CRR-model is often used in real option pricing[9] and firm valuation techniques like the DCF approach[10].

Most research papers on the DCF approach implicitly assume a kind of random walk for modeling the uncertainty and growth of the FCF.[11] *Arzac* and *Glosten* (2005) give a compressed overview on possible process assumptions for modeling the firm's future FCF. Furthermore, they choose the most interesting case (which is very similar to equation(2.1.1)) and replicate the findings of *Miles* and *Ezzell* (1980). Based upon the explicit assumption of a weak autoregressive cash flow process according to equation (2.1.1), *Kruschwitz* and *Löffler* (2006) show how to derive correct valuation and adjustment formulas for the DCF approach . The

[7]For a more detailed view on this see *Shreve* (2004).

[8]For an application of the process assumption by *Cox* and *Ross* (1976) on tax-loss carryforwards see *Streitferdt* (2010).

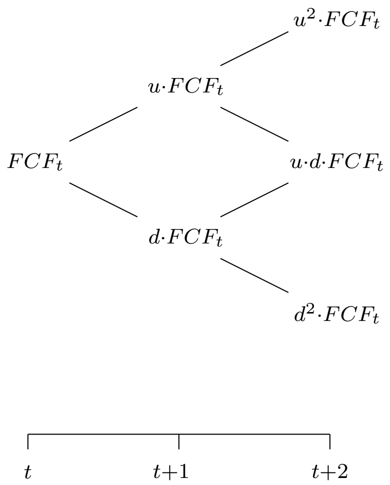
[9]See for an intensive treatment of this topic *Dixit* and *Pindyck* (1994).

[10]See for an application of an CRR like model in DCF *Kruschwitz* and *Löffler* (2006).

[11]See for example *Massari*, *Roncaglio* and *Zanetti* (2007). They describe the underlying random walk of the FCF and its behavior.

derivation of the cash flow process is based on a binomial lattice whose properties are similar to the CRR-model (see figure 2.2).

Figure 2.2: A two-period binomial lattice according to *Kruschwitz* and *Löffler* (2006).



In the case of an up movement, this recombining binomial lattice[12] implies in $t+1$ the free cash flow to increase by the factor u and in case of a down movement to decline by the factor $d = \frac{1}{u}$. The probabilities of an up or down movement are $p_{u,t}$ and $p_{d,t} = 1 - p_{u,t}$, respectively. The expected value of a free cash flow in period $t+1$ is

$$\begin{aligned} E\left[FCF_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] &= \left(p_{u,t} \cdot u + p_{d,t} \cdot d\right) FCF_t \\ &= (1+g_t) FCF_t, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

[12]As already mentioned by *Nelson* and *Ramaswamy* (1990) a recombining binomial lattice is a convenient assumption for simplicity purposes. At each time step the branches of the lattice reconnect which implies $N = t+1$ nodes at the time step t. In comparison a non-recombining binomial lattice has 2^t nodes at time step t.

where $g_t = (p_{u,t} \cdot u + p_{d,t} \cdot d) - 1$[13] is defined as the growth rate in t.[14] This growth assumption is a necessary condition for deriving the famous terminal value formula $\frac{E[FCF_t]}{r-g}$. By matching the first and second order moments of the binomial distribution implied by the binomial lattice in figure 2.2 with those of equation (2.2.1), it is possible to fit the up and down factors to the characteristics of the GBM. According to the CRR-model at each time step the movements and the probabilities are fitted by $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = \frac{1}{u}$, $p_{u,t} = \frac{1+\mu\Delta t-d}{u-d}$ and $p_{d,t} = 1 - p_{u,t}$, respectively. However, since the CRR-approach is only valid for fitting a GBM to a recombining binomial lattice it is necessary to rely on a more general approach for fitting other stochastic processes.

Nelson and *Ramaswamy* (1990) derived a more general approach for fitting a binomial lattice to a generalized Brownian motion of the form $dS_t = \mu_t(S)dt + \sigma_t(S)dW_t$, where $\mu_t(S)$ is the drift and $\sigma_t(S)$ the standard deviation. Both are allowed to be adapted processes. For a binomial lattice of N periods, with $T = N{\cdot}\Delta t$, in every node the up and down movements have to be calculated by the following equations to reflect the current state:

$$\begin{aligned} u_t &= \sqrt{\Delta t}\sigma(S,t), \\ d_t &= -\sqrt{\Delta t}\sigma(S,t). \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Since probabilities have the following two important properties:

1. Nonnegativity: $p_{\omega,t} \geq 0$,

2. Unity: $p_{u,t} + p_{d,t} = 1$,

Nelson and *Ramaswamy* (1990) line out that it is necessary for certain stochastic

[13] Note that g_t is here deterministic and already known in t. Another possibility is to use the expected value of the growth rate $E[g_t]$.

[14] *Laitenberger* and *Löffler* (2006) show the consistency of the "weak" autoregressive free cash flow assumption with the capital budgeting method. Furthermore, they obtain deterministic cost of capital.

differential equations to censor the values of $p_{u,t}$, as shown in the following equation:

$$p_{u,t} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta t}\frac{\mu(S,t)}{\sigma(S,t)} & , 0 \leq p_{u,t} \leq 1, \\ 0 & , p_{u,t} \leq 0, \\ 1 & , p_{u,t} \geq 1, \end{cases} \tag{2.2.5}$$

and in a more comprehensive form by

$$p_{u,t} = \max\left(0,\ \min\left(1,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta t}\frac{\mu(S,t)}{\sigma(S,t)}\right)\right). \tag{2.2.6}$$

If the underlying stochastic process is a GBM with constant drift and standard deviation the equations (2.2.4) and (2.2.5) converge to the above mentioned CRR-model.

2.2.2 An additive recombining binomial lattice / An ABM implied binomial lattice

The approach outlined in the last section can be applied to an ABM given by equation (2.2.2) to analyze its implications to selected questions in DCF theory. Consider a simple ABM with constant drift and standard deviation for the evolution of free cash flows given by

$$dFCF_t = \mu dt + \sigma dW_t. \tag{2.2.7}$$

By substituting the parameters of equation (2.2.7) into (2.2.4) and (2.2.5) it is possible to derive the following properties of a recombining binomial lattice based upon an ABM:

$$u_t = \sqrt{\Delta t}\sigma, \tag{2.2.8}$$

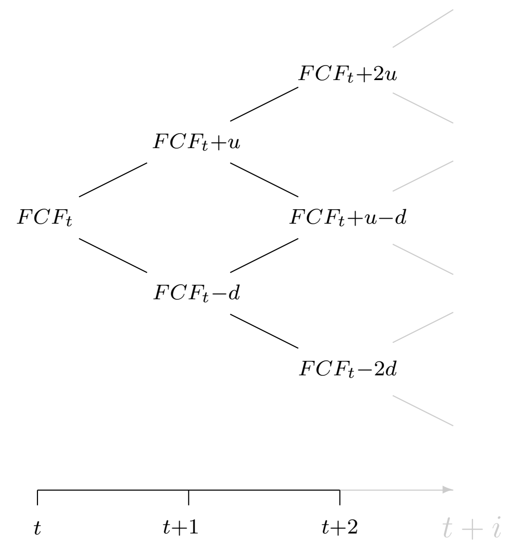
$$d_t = -\sqrt{\Delta t}\sigma, \tag{2.2.9}$$

$$p_{u,t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta t}\frac{\mu}{\sigma}, \tag{2.2.10}$$

$$p_{d,t} = 1 - p_{u,t}. \tag{2.2.11}$$

Note that equation (2.2.10) is equal to the one originally derived by *Cox*, *Ross* and *Rubinstein* (1979) in case of a GBM. If we would have assumed a GBM, the current FCF values cancel out in equation (2.2.10) Due to the assumption of constant drift and standard deviation in equation (2.2.7) u_t, d_t and $p_{u,t}$ are constant as well, although we still keep the subscript t. Furthermore, it is important to note, that all parameters of an ABM are absolute parameters. The results of equations (2.2.8) - (2.2.11) can be easily depicted in a binomial lattice (see figure 2.3).

Figure 2.3: ABM implied two-period binomial lattice.



Suppose that the free cash flows follow the binomial distribution outlined in figure 2.3. The free cash flow increases by an absolute amount u with probability $p_{u,t}$ in the case of an upward movement and decreases in the case of a downward movement by the absolute amount $d = -u$ with probability p_d. This assumption is clearly to differentiate from the standard assumption in DCF theory, where the free cash flow increases or decreases depending on the up or down movement by the (multiplicative) factors u and d.[15] This implies for the free cash flows of two time

[15]By standard assumption in DCF theory we refer to the formulation by *Kruschwitz* and *Löffler* (2006) or *Arzac* and *Glosten* (2005).

periods t and $t+1$ the following relationship

$$FCF_{t+1} = \begin{cases} FCF_t + u, & \text{in the case of an up movement in } t+1, \\ FCF_t - u, & \text{in the case of an down movement in } t+1. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Using the equations (2.2.12) and (2.2.11) the expected free cash flows can be written as follows:

$$\begin{aligned} E[FCF_{t+1}] &= p_{u,t}(FCF_t + u_t) + p_{d,t}(FCF_t - u_t) \\ &= (p_{u,t} + p_{d,t})FCF_t + p_{u,t}u_t - u_t(1 - p_{u,t}) \\ &= FCF_t + \underbrace{u_t(2p_{u,t} - 1)}_{=:G_t} \\ &= FCF_t + G_t, \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

where G_t is the absolute amount of free cash flow growth. The absolute growth G_t is under the assumption of constant μ and σ as well constant and not time dependent. This implies a discrete "additive" free cash flow process of the form

$$FCF_{t+1} = FCF_t + G_t + \varepsilon_{t+1}, \tag{2.2.14}$$

where ε_t is the noise term with $E[\varepsilon_t|\mathcal{F}_0] = 0$ and $Cov[\varepsilon_t,\ \varepsilon_s] = 0$.[16] This process is very similar to the ones widely used by the empirical tax benefits literature e.g. *Blouin*, *Core* and *Guay* (2010) or *Graham* (2000).

2.3 Application to the discounted cash flow method

In this section we apply the derived binomial lattice and its implied FCF process on the DCF approach. By recapping central formulas of the DCF approach, we show the influence of the discrete additive process assumption on firm valuation. For our purposes it is convenient to analyze an all equity financed or unlevered firm.

[16] See Appendix A.1.

The unlevered firm value V_t^U is calculated by discounting the unlevered free cash flows FCF_t^U with the unlevered cost of equity r^u. Since the free cash flows are modeled by an additive process we are faced with an important problem: future state dependent free cash flows could have negative values. The recent literature on the inclusion of an ABM in asset pricing models[17] accounts for this topic by modeling cash inflows assuming negative dividend payments. The aforementioned procedure implies the possibility of negative expected future free cash flows and thus negative equity values. As this result contradicts the standard assumption of limited liability this implication has to be analyzed with great care.[18] We apply a scenario which explicitly refers to the standard assumptions in financial theory[19]

Limited liability

> The considered unlevered firm operates as a limited liability firm. Therefore the liability of the equity holders is excluded.

This assumption is completely in-line with the existing literature (i.e. *Modigliani* and *Miller* (1963), *Miles* and *Ezzell* (1980), *Kruschwitz* and *Löffler* (2006) and *Merton* (1973a)) and implies that in the worst case the equity holders end up with nothing. So there should be no situations in which the value of the equityholders turns negative.

But before we turn our attention to possible implications of this in the numerical examples section we first derive the valuation formulas for an unlevered firm and show a possible link between the additive and multiplicative process.

[17] See *Alexander*, *Mo* and *Stent* (2012) for using an ABM to model the pricing of an ivestment project or *Bank* and *Wibmer* (2011) on the determination of the optimal capital structure for start-up firms.

[18] A model with possible infinite capital inflows might be mathematical elegant but not relevant in corporate valuation as it is not realistic.

[19] These assumptions are for example arbitrage-free capital markets, spanning and homogenous expectations. For a detailed listing see *Merton* (1973a) assumptions A.1 - A.7 or *Merton* (1974).

2.3.1 Valuation of an unlevered firm

According to the assumptions stated in the previous section, numerous researchers have proven that the value of an unlevered firm is given by:[20]

$$V_t^U = \sum_{s=t+1}^{T} \frac{E\left[FCF_s^U|\mathcal{F}_t\right]}{(1+r^u)^{s-t}}, \tag{2.3.1}$$

or under the risk-neutral probability measure

$$V_t^U = \sum_{s=t+1}^{T} \frac{E_{\mathbb{Q}}\left[FCF_s^U|\mathcal{F}_t\right]}{(1+r_f)^{s-t}}, \tag{2.3.2}$$

where V_t^U is the value of the unlevered firm, FCF_t^U the unlevered free cash flows, r^u the unlevered cost of equity, and r_f the risk-free rate. So far the equations (2.3.1) and (2.3.2) do not reflect the impact of the additive process assumption. In order to show how this assumption impacts the aforementioned equations, we first show how to derive the conditional $\mathbb{Q}$-probabilities and afterwards continue by determining the corresponding (terminal value) formulas in a steady growth scenario.

In sense of the fundamental theorem of asset pricing[21] the conditional $\mathbb{Q}$- or risk-neutral probabilities are necessary for the calculation of the expected values $E_{\mathbb{Q}}[.]$ in equation (2.3.2). Following appendix A.2 the risk-neutral probabilities can be derived by transforming the ABM process (2.2.7) into a martingale under the risk-neutral measure $\mathbb{Q}$ given by

$$dFCF_t^U = r_f\ FCF_t^U\ dt + \sigma\ dW_t^{\mathbb{Q}}, \tag{2.3.3}$$

with the market price of risk being defined as

$$\Theta_t^{ABM} = \frac{\mu_t - r_f\ FCF_t^U}{\sigma_t}. \tag{2.3.4}$$

[20]See for example *Myers* (1974), *Miles* and *Ezzell* (1980), (1985) and *Arzac* and *Glosten* (2005).
[21]See *Harrison* and *Kreps* (1979) and *Back* and *Pliska* (1991).

It is important to recap that in equation (2.3.4) μ_t, σ_t and $r_f \cdot FCF_t^U$ are absolute numbers. Note that this market price of risk is clearly to differentiate from the usual CAPM[22] definition of the market price of risk $\Theta_t^{CAPM} = \frac{\mu_t^{\varrho} - r_f}{\sigma_t^{\varrho}}$, where μ_t^{ϱ} is the assets or markets return (or in case of a GBM the drift rate), r_f the risk-free rate and σ_t^{ϱ} the returns volatility. In order to find appropriate risk-adjusted discount rates, one has to re-derive the CAPM version of *Merton* (1973a) using ABMs for modeling the random behavior of all (!) assets in the market. This would imply, that all asset prices including stocks do not follow a geometric Brownian motion and could become negative. This clearly contradicts the idea of a limited liability company. As this topic is not the core of our analysis we leave this discussion for future research. In addition, note that the drift term in equation (2.3.3) is $r_f \cdot FCF_t^U$ rather than simply r_f. This risk-neutral transformation results from mixing proportional returns as the risk-free rate with an arithmetic Brownian motion.

Subsequently we use the same algorithm as outlined in section 2.2.1 in order to model the risk-neutral ABM in discrete time. Therefore the risk-neutral probabilities for an up ($q_{u,t}$) or a down movement ($q_{d,t}$) are given by

$$\begin{aligned} q_{u,t} &= \max\left(0,\ \min\left(1, \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\Delta t}\frac{r_f\ FCF_t^U}{2\sigma}\right)\right)\right), \\ q_{d,t} &= 1 - q_{u,t}. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

These risk-neutral probabilities are necessary for the recombining binomial approximation of the risk-neutral ABM given in equation (2.3.3). The $\mathbb{Q}$-probabilities have to be censored if the absolute value difference between u / d and the FCF_t in a particular state imply probabilities below 0 or above 1.[23] The up and down movements u_t and d_t remain the same as given by the equations (2.2.8) and (2.2.9) respectively.

These risk-neutral probabilities are required for showing the validity of the fundamental theorem of asset pricing but we continue to develop the valuation equations

[22]By the usual CAPM definition we refer to *Mossin* (1966) for the one period version or to *Merton* (1973a) for the multiperiod or intertemporal version of the CAPM.
[23]For a proof of the no arbitrage condition see appendix A.2.3.

under the subjective probability measure $\mathbb{P}$. By letting T tend to infinity the corresponding terminal value of a steady growth firm whose free cash flows follow a stochastic process as outlined in equation (2.2.13) can be determined by[24]

$$V_t^U = \frac{FCF_t^U}{r^u} + \frac{1+r^u}{(r^u)^2}G, \tag{2.3.6}$$

where

$\frac{FCF_t^U}{r^u}$	is the terminal value of the current unlevered free cash flow,
$\frac{1+r^u}{(r^u)^2}G$	is the terminal value of the absolute growth term G_t.

In comparison to equation (2.3.6) the assumption of a multiplicative stochastic process (see eq. (2.2.3)) implies for the calculation of the terminal value of an unlevered firm[25]

$$V_t^U = \frac{FCF_t^U}{r^u - g_t}. \tag{2.3.7}$$

Comparing the V_t^U term in equation (2.3.6) with equation (2.3.7) shows that the growth term does not appear in the denominator as a subtrahend to the cost of capital of an unlevered firm. Instead the additive process assumption results in an absolute growth term $\frac{1+r^u}{(r^u)^2}G$ which is added to the terminal value of the FCF_t^U.

2.3.2 The equivalence of G and g_t

In this section we state the equivalence between the both valuation approaches based upon the additive and the multiplicative process assumption.

Since the multiplicative stochastic process is one of the standard assumptions in DCF it might be of particular interest which corresponding growth rate g_t implies the equivalence between the two valuation formulas for V_t^U based upon the discussed

[24]See appendix A.3 for the prove of V_t^U.

[25]See for example *Arzac* and *Glosten* (2005).

(aforementioned) process assumptions. In every period t the equivalence is achieved by setting $g_t = \frac{G}{FCF_t^U}$. Note that the growth rate is time dependent due to the fact, that G is assumed to stay constant.[26] A closer look on the relation between g_t and G reveals that we have to consider five cases depending on the current realisation of the FCF_t^U and the absolute growth term G:

1. **Positive absolute growth ($G > 0$) and positive FCF in t ($FCF_t^U > 0$):**
   The expected free cash flows $E[FCF_s^U]$ for all future periods s, with $s > t$, stay positive implying that all future growth rates g_s are positive as well but declining with growing free cash flows.

2. **Positive absolute growth ($G > 0$) and negative FCF in t ($FCF_t^U < 0$):**
   This is one of the most interesting cases due to its possible application on start-up firm valuation. The free cash flows generated by a start-up firm usually have a negative algebraic sign at the beginning of the firms operations. Furthermore, start-ups tend to have a remarkably high growth implying for the expected free cash flows to become positive in some future period s, with $s > t$. The algebraic sign of the implied growth rate g_s is negative and changes to positive in the period s as the free cash flows become positive.

3. **Negative absolute growth ($G < 0$) and positive FCF in t ($FCF_t^U > 0$):**
   In some future period s, with $s > t$, the expected free cash flows become negative while the algebraic sign of the growth rate g_s changes from negative to positive in period s (as soon as the sign of the expected free cash flows changes).

4. **Negative absolute growth ($G < 0$) and negative FCF in t ($FCF_t^U < 0$):**
   The expected free cash flows stay negative and therefore the algebraic sign of g_t is positive for all periods.

[26] In case of the assumption of a constant growth rate g the relation $g = \frac{G_t}{FCF_t}$ implies a time varying absolute growth term G_t.

5. FCF in t equals zero ($FCF_t^U = 0$):

If the current FCF is zero g_t is not defined in $\mathbb{R}$.

Until now we focussed on the relation between the period specific growth rate g_t and the absolute growth term G. Below we show how g_t has to be chosen to reach equal terminal values under the two process assumptions. Following appendix A.4 the equivalence between the terminal values of V_t^U is achieved by setting the growth rate for the terminal value (g_t) for a given G to

$$g_t = r^u - \frac{FCF_t^U}{\frac{FCF_t^U}{r^u} + \frac{1+r^u}{(r^u)^2}G}. \tag{2.3.8}$$

The above formula states a consistent link between the absolute growth term G of an additive process assumption and the terminal value implied growth rate g_t of a multiplicative process assumption. For $G > 0$ the first derivative of equation (2.3.8) is negative implying a declining growth rate g_t. For the rest of the article we assume $G > 0$ in order to show the implications for a typical valuation setting.

2.4 Numerical examples

In this section the general approach for an ABM implied binomial lattice of section 2.2 and the application to the DCF method of section 2.3 are applied to numerical examples for the valuation of an unlevered firm. This application deals with the conclusions drawn from the discrete additive free cash flow process assumption implied by an ABM. In order to discuss some conclusions we will consider an unlevered firm whose operations discontinue after $t = 3$ with no significant liquidation proceedings.[27]

We use the ABM implied binomial lattice methodology, state the equivalence of the resulting absolute growth term G and the growth rate g_t and calculate the unlevered firm values using the risk-neutral pricing methodology for the following

[27] See for a similar example *Kruschwitz*, *Lodowicks* and *Löffler* (2005).

two numerical examples: (1.) with strictly positive free cash flows in all states, (2.) with the possibility of state dependent negative free cash flows. The value of the unlevered firm depends on the parameters μ and σ, the assumed risk free rate and the initial free cash flow value. In addition, we determine the implied growth rate for all examples using the period specific relation ($g_t = \frac{G}{FCF_t^U}$) and the implied unlevered cost-of-equity.

In the first example the unlevered firm is not faced with the possibility of negative free cash flows since the (chosen) parameters of the ABM imply for the binomial lattice approximation that all possible states until $t = 3$ have positive free cash flows. The second example in comparison to example 1 deals with the impact of a discrete additive process whose free cash flows could become negative. Initially, the free cash flow in $t = 0$ is assumed to have a positive value, but the parameters of the ABM are chosen such that in some states of the binomial approximation negative free cash flows occur.

Example 1: Positive state dependent free cash flows.

The free cash flows follow an ABM with a constant absolute growth of $\mu = 0.5$, a constant absolute volatility of $\sigma = 2.5$ and the initial value is set to $FCF_0^U = 10$. For the approximation of the ABM by a binomial lattice we choose for demonstration purposes $\Delta t = 1$ and calculate the up and down movements as well as the corresponding $\mathbb{P}$ and $\mathbb{Q}$ probabilities using the equations (2.2.8), (2.2.9), (2.2.10), (2.2.11), and (2.3.5). Note that for example $q_{dd,2}$ denotes the risk-neutral probability for two down movements. The resulting binomial lattice is shown in figure 2.4. We further assume a constant risk free rate of $r_f = 0.04$. In a brief overview the parameters and the calculations for the valuation of the unlevered firm are:

Assumed parameters:			
$\mu = 0.5$	$\Delta t = 1$	$r_f = 0.04$	$FCF_0^U = 10$
$\sigma = 2.5$			
Binomial lattice calculations:			
$p_u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{0.5}{2.5} = 0.6$		$p_d = 1 - 0.6 = 0.4$	
$u = 1 \cdot 2.5 = 2.5$		$d = -1 \cdot 2.5 = -2.5$	
Risk-neutral probabilities:			
$q_{u,1} = 0.58$	$q_{d,1} = 0.42$	$q_{uu,2} = 0.6$	$q_{ud,2} = 0.4$
$q_{du,2} = 0.56$	$q_{dd,2} = 0.44$	$q_{uuu,3} = 0.62$	$q_{uud,3} = 0.38$
$q_{udu,3} = 0.58$	$q_{udd,3} = 0.42$	$q_{ddu,3} = 0.54$	$q_{ddd,3} = 0.46$
Absolute growth:			
$G = 2.5(2 \cdot 0.6 - 1) = 0.5$			
Expected free cash flows under $\mathbb{P}$ and $\mathbb{Q}$:			
$E[FCF_1^U] = 10 + 0.5 = 10.5$	$E_{\mathbb{Q}}[FCF_1^U] = 0.58 \cdot 12.5 + 0.42 \cdot 7.5 = 10.4$		
$E[FCF_2^U] = 11$	$E_{\mathbb{Q}}[FCF_2^U] = 10.82$		
$E[FCF_3^U] = 11.5$	$E_{\mathbb{Q}}[FCF_3^U] = 11.25$		
Valuation of the unlevered firm:			
$V_t^U = \frac{10.4}{1.04} + \frac{10.82}{1.04^2} + \frac{11.25}{1.04^3} = 30$			

Using equation (2.3.2) we have calculated the components of V_t^U. The implied growth rate for the first years are $g_0 = 5\%$, $g_1 = 4.76\%$, $g_2 = 4.55\%$ and $g_3 = 4.35\%$. As shown in figure 2.6 g_t declines with increasing values of $E\left[FCF_t^U\right]$ and would approach zero, if we had considered periods with $t > 3$. This may be regarded as a convenient behaviour for the growth rate in firm valuation where $T = \infty$ is possible. The definition of the cost of equity of the unlevered firm as conditional expected returns[28]

$$r_t^u := \frac{E_{\mathbb{Q}}\left[FCF_{t+1}^U + V_{t+1}^U | \mathcal{F}_t\right]}{V_t^U} - 1 \tag{2.4.1}$$

[28]See for example *Kruschwitz* and *Löffler* (2006), p. 33.

enables us to calculate implied unlevered cost of equity. Applying this formula yields the following:

$$r_1^u = 0.013,\ r_2^u = 0.041\ , r_3^u = 0.125.$$

If we had used these implied unlevered cost of equity for discounting the expected free cash flows under $\mathbb{P}$ we would get the same value for V_t^U as by using the risk-neutral probabilities.

Example 2: Possible negative state dependent free cash flows.

For our second example we assume the same parameters as given in example 1 with one exception, the free cash flow in $t = 0$ is set to $FCF_0^U = 5$ implying a recalculation of the state dependent free cash flows (see figure 2.5), the risk-neutral probabilities and the expected free cash flows under $\mathbb{P}$ and $\mathbb{Q}$. The values for p_u, p_d, u, d and G remain the same as computed in example 1, but we have to recalculate the value of the unlevered firm. In a brief overview the calculations are:

Modified parameters:			
$FCF_0^U = 5$			
Risk-neutral probabilities:			
$q_{u,1} = 0.54$	$q_{d,1} = 0.46$	$q_{uu,2} = 0.56$	$q_{ud,2} = 0.44$
$q_{du,2} = 0.52$	$q_{dd,2} = 0.48$	$q_{uuu,3} = 0.58$	$q_{uud,3} = 0.42$
$q_{udu,3} = 0.54$	$q_{udd,3} = 0.46$	$q_{ddu,3} = 0.5$	$q_{ddd,3} = 0.5$
Expected free cash flows under $\mathbb{P}$ *and* $\mathbb{Q}$:			
$E[FCF_1^U] = 5 + 0.5 = 5.5$	$E_{\mathbb{Q}}[FCF_1^U] = 0.54 \cdot 7.5 + 0.46 \cdot 2.5 = 5.2$		
$E[FCF_2^U] = 6$	$E_{\mathbb{Q}}[FCF_2^U] = 5.41$		
$E[FCF_3^U] = 6.5$	$E_{\mathbb{Q}}[FCF_3^U] = 5.62$		
Valuation of the unlevered firm:			
$V_t^U = \frac{5.2}{1.04} + \frac{5.41}{1.04^2} + \frac{5.62}{1.04^3} = 15$			

In comparison to example 1 the lowered initial value FCF_0^U of 5 and the unchanged absolute growth $G = 0.5$ have a significant impact on the corresponding components of V_t^U: The value declined by 50%. Since the impact of G upon the expected values of the free cash flows remains unchanged the implied growth rates almost doubled to $g_0 = 10\%$, $g_1 = 9.09\%$, $g_2 = 8.33\%$ and $g_3 = 7.69\%$. Again figure 2.6 shows that the implied growth rate approaches zero with increasing $E\left[FCF_t^U\right]$. In this context it is important to note that using an ABM or implied discrete additive process requires to check the chosen value of G and cross check it with its influence on the implied growth rate, because it is unlikely for firms to grow for a longer time horizon with growth rates above the average GDP growth rate. This requires a careful choice of G. Since the expected free cash flows and the unlevered firm value decreased equally the implied unlevered cost of equity according to equation (2.4.1) remain the same as calculated in the first example. As depicted in figure 2.5 the proposed setting of example 2 results in a negative free cash flow value of -2.5 in state *ddd*. If we relax the limited liability assumption these negative free cash flows would imply a cash payment by the equity holders. However, this contradicts the limited liability assumption where the investors are not personally liable for financial commitments of the firm. Furthermore, in this standard setting a negative free cash flow requires the unlevered firm either to issue new equity or to start borrowing debt. In the first case a rational equity holder would only invest in the company if the net present value of his investment is positive. In our simple example here this is not the case: the firmÂ´s lifetime ends in period 3, thus not yielding any further cash flows to the investors. Extending the lifetime of the firm by one more period would allow for the analysis required here: the owner of the firm would be able to calculate the present value of the future expected free cash flows and net it against the equity contribution in period 3. However the same problem as in t=3 will then show up in the following period: In the “down” state there will be another negative free cash flow, thus requiring another equity contribution. Again, being the last period in the firmÂ´s lifetime rational shareholders will not contribute any payment. As a result negative free dash flows are in conflict with the assumption of limited liability. In the second case the decisional-calculus of the creditor should be considered.[29] In the second case the model would also have to be significantly extended: The risk adjusted credit rate and potential bankruptcy will have to be modelled. As an extension of the model one could include cash reserves, whose value increases while the free cash flows are positive and decreases with negative free cash flows. Since such an approach deviates from the standard assumption of a full distribution of the free cash flows, additional assumptions are necessary which reach far beyond the scope of this paper.

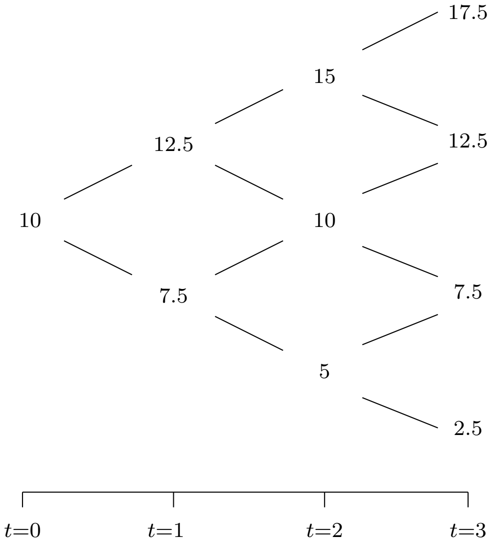
2.5 Summary

A GBM or its discrete alternative, a multiplicative process, is a standard assumption for modeling the behavior of earnings figures in corporate valuation or capital structure theory. Since the values of a GBM cannot become negative for positive starting values some recent articles discuss the use of an ABM. Despite the fact that earnings figures modeled by an ABM could become negative many implications of an ABM or its discrete alternative, an additive process, have not yet been fully explored.

In this paper we have shown how to approximate an ABM by a recombining binomial lattice. Based upon this approximation we have derived a discrete time alternative of the ABM. In contrast to the standard assumption of a multiplicative process, this additive process grows by an absolute amount G. Additionally we have shown how to apply this additive process to the DCF framework. In this application we included (1.) the derivation of the ABM under the risk-neutral probability measure which enabled us to calculate the risk-neutral probabilities for the ABM implied recombining binomial lattice; (2.) the discussion of the difference between the ABM implied market price of risk and the standard CAPM market price

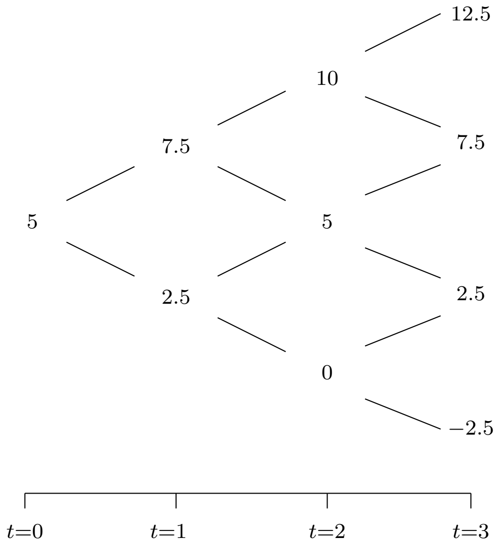
[29] See for further considerations of this topic *Merton* (1974) or *Kruschwitz* and *Löffler* (2006).

Figure 2.4: Ex.1: Positive FCF.



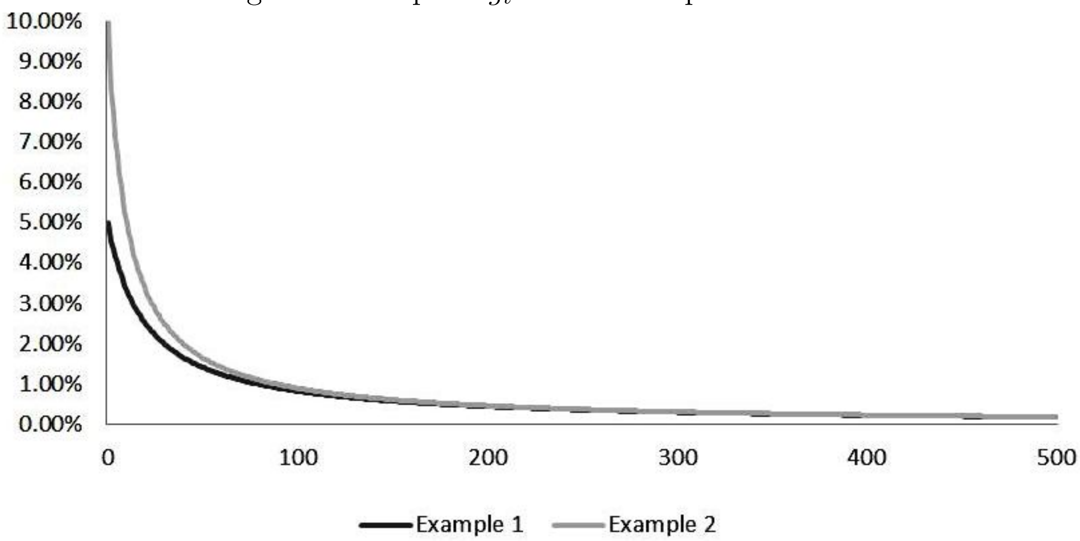
Note figure 2.4 depicts a binomial lattice which approximates an ABM with the parameter values of the first example: $\mu = 0.5$, $\sigma = 2.5$ and $FCF_0^U = 10$. With the assumed $\Delta t = 1$ the calculated probabilities amount to $p_u = 0.6$, $p_d = 0.4$ and the up / down movements to $u = 2.5$, $d = -2.5$.

Figure 2.5: Ex.2: Negative FCF.



Note figure 2.5 depicts a binomial lattice which approximates an ABM with FCF_0^U set to 5. The parameters are chosen to such an extent that negative state dependent free cash flows are possible.

Figure 2.6: Implied g_t of the examples 1 and 2.



of risk. Furthermore, we demonstrated the equivalence between the multiplicative and the additive process for certain values of g_t. Due to the process assumption the unlevered firms free cash flows could become negative resulting in a payment of the equity holders to the firm. This contradicts the assumption of a limited liability firm.

In our two numerical examples we further discussed the value impact of the absolute growth term, the behavior of the implied growth rate and possible extensions to model negative free cash flows without contradicting the limited liability assumption.

In this article we made several assumptions which belong to the standard in financial theory. It is important to note that the derivations and its implications directly related to the ABM remain unaffected: (1.) the market price of risk of an ABM; (2.) the necessity to cross-check the assumed absolute growth with the implied growth rate; (3.) the necessity to consider the implications of the limited liability assumption in association with the possibility of negative free cash flows. The aforementioned topics could be examined in detail in expanded studies. For example, in reality, a firm valuation is in fact based upon forecasted free cash flows and empirically raised data and not on the risk-neutral valuation methodology. The different market price of risk could have a huge impact on the empirical estimation. From a theoretical point of view the impact of an ABM on capital budgeting should be clarified.

Appendix A

A.1 Expected value and covariance of the noiseterm ε_t.

The expectation of the noise term is 0.

Proof.

$$\begin{aligned} E\left[\varepsilon_t\right] &= E\left[\varepsilon_t|\mathcal{F}_0\right] \\ &= E\left[E\left[\varepsilon_t|\mathcal{F}_t\right]|\mathcal{F}_0\right] \\ &= E\left[E\left[FCF_{t+1} - FCF_t - G_t|\mathcal{F}_t\right]|\mathcal{F}_0\right] \\ &= E[0|\mathcal{F}_0] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

The noise terms for two periods s and t, with $s > t$, are uncorrelated.

Proof.

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}\left[\varepsilon_t,\ \varepsilon_s\right] &= E\left[\varepsilon_t\varepsilon_s\right] - E\left[\varepsilon_t\right]E\left[\varepsilon_s\right] \\ &= E\left[\varepsilon_t\varepsilon_s\right] \\ &= E\left[\varepsilon_t\varepsilon_s|\mathcal{F}_0\right] \\ &= E\left[E\left[\varepsilon_s|\mathcal{F}_t\right]\varepsilon_t|\mathcal{F}_0\right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.1.2}$$

A.2 Derivation of conditional $\mathbb{Q}$-probabilities

The fundamental theorem of asset pricing states that the value of a firm under the risk-neutral probability measure is equal to the value calculated under the real probability measure

$$V_t^U = \frac{E_{\mathbb{Q}}[FCF_{t+1}^U + V_{t+1}^U]}{(1 + r_f)} = \frac{E[FCF_{t+1}^U + V_{t+1}^U]}{(1 + r^u)}. \tag{A.2.1}$$

In order to use this relationship, we have to transfer the ABM given in equation (2.2.7) into its risk-neutral equivalent. For this transformation we need general results from stochastic calculus (see for example *Shreve* (2004), *Bingham* and *Kiesel*

(2004) or *Baxter* and *Rennie* (1996)). A mathematical proof of a risk-neutral shift for a generalized Brownian motion can be found in *Shreve* (2004).

A.2.1 Risk-neutral arithmetic Brownian motion

Consider the stochastic differential equation (SDE) of an ABM is given by

$$dFCF_t = \mu_t \; dt + \sigma_t \; dW_t, \tag{A.2.2}$$

with $0 \leq t \leq T$; the absolute drift μ_t and the absolute standard deviation σ_t, with $\sigma_t > 0$ are allowed to be adapted processes. W_t is a Brownian motion on the (real or subjective) probability space $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$.

Assume a discount process of the form

$$B_t = exp\left(-\int_0^t R_s \; ds\right), \tag{A.2.3}$$

where *exp* is the exponential function and R_t the interest process of an risk-free asset. Before we derive the risk-neutral version of the SDE (A.2.2) we first need an expression for dB_t. By defining $I(t) = \int_0^t R_s ds$ and $f(x) = e^{-x}$ with $f'(x) = -f(x),\ f''(x) = f(x)$, then

$$\begin{aligned} dB(t) &= df(I_t) \\ &= f'\left(I_t)\right) dI_t + \frac{1}{2} f''\left(I_t\right) d\left(I_t\right) d\left(I_t\right) \\ &= -f\left(I_t\right) R_t dt \\ &= -e^{-I_t} R_t dt \\ &= -e^{-\int_0^t R_s dt} R_t dt \\ &= -R_t B_t dt. \end{aligned} \tag{A.2.4}$$

We continue to derive the differential $d(B_t \; FCF_t)$ by using an important result of the Itô Calculus: the product rule technique of two random variables

$$d\,(B_t\ FCF_t) = B_t\ dFCF_t + FCF_t\ dB_t + dB_t\ dFCF_t. \tag{A.2.5}$$

The two differentials dB_t and $dFCF_t$ are already given by the equations (A.2.4) and (A.2.2) respectively. Using the product rule, it is possible to derive the discounted version of the ABM:

$$\begin{aligned} d(B_t FCF_t) &= B_t\ dFCF_t + FCF_t\ dB_t + dB_t\ dFCF_t \\ &= B_t\,(\mu_t\ dt + \sigma_t\ dW_t) - FCF_t\ R_t\ B_t\ dt \\ &\quad + (\mu_t\ dt + \sigma_t\ dW_t)\,(-R_t\ B_t\ dt) \\ &= B_t\,(\mu_t\ dt + \sigma_t\ dW_t) - FCF_t\ R_t\ B_t\ dt \\ &\quad - \underbrace{R_t\ B_t\ \mu_t\ dtdt}_{=0;\ \text{with}\ dtdt=0} - \underbrace{\sigma_t\ R_t\ B_t\ dW_t\ dt}_{=0;\ \text{with}\ dW_t dt=0} \\ &= \mu_t\ B_t\ dt + \sigma_t\ B_t\ dW_t - FCF_t\ R_t\ B_t\ dt \\ &= (\mu_t - R_t\ FCF_t)\,B_t\ dt + \sigma_t\ B_t\ dW_t \\ &= \left[\frac{\mu_t - R_t\ FCF_t}{\sigma_t} dt + dW_t\right] \sigma_t\ B_t. \end{aligned} \tag{A.2.6}$$

In the case of an ABM the market price of risk has to be defined by

$$\Theta_t^{ABM} = \frac{\mu_t - R_t\ FCF_t}{\sigma_t}. \tag{A.2.7}$$

By combining the results of Grisanov's theorem[1] with the calculated market price of risk Θ_t^{ABM} it is possible to rewrite equation (A.2.6) as

$$d(B_t\ FCF_t) = \sigma_t\ B_t\ dW_t^{\mathbb{Q}} \tag{A.2.8}$$

[1]See for example *Shreve* (2004), p. 212.

with

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + \int_0^t \Theta_s^{ABM} ds. \tag{A.2.9}$$

Substituting $dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t + \Theta_t^{ABM}\ dt$ into equation (A.2.2) and by assuming a constant risk-free rate, $R_t = r_f$, we get the corresponding ABM under the (risk-neutral) probability space $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{Q})$

$$dFCF_t = r_f\ FCF_t\ dt + \sigma_t\ dW_t^{\mathbb{Q}}. \tag{A.2.10}$$

A.2.2 Corresponding risk-neutral binomial lattice

Given the risk-neutral ABM in equation (2.3.3) we use the same approach as outlined in section 2.2.1 to calculate the conditional $\mathbb{Q}$-probabilities $(q_{u,t},\ q_{d,t})$:

$$q_{u,t} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sqrt{\Delta t}\frac{r_f\ FCF_t}{2\sigma} & ,\quad \text{if } 0 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\Delta t}\frac{r_f\ FCF_t}{2\sigma} \leq 1, \\ 0 & ,\quad \text{if } \frac{1}{2} + \sqrt{\Delta t}\frac{r_f\ FCF_t}{2\sigma} < 0, \\ 1 & ,\quad \text{if } \frac{1}{2} + \sqrt{\Delta t}\frac{r_f\ FCF_t}{2\sigma} > 1. \end{cases} \tag{A.2.11}$$

$$q_{d,t} = 1 - q_{u,t} \tag{A.2.12}$$

or in short form

$$q_{u,t} = \max\left(0,\ \min\left(1, \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\Delta t}\frac{r_f\ FCF_t}{2\sigma}\right)\right)\right). \tag{A.2.13}$$

In this case it is necessary to censor the risk-neutral probabilities when the difference between u and the FCF_t from a particular state and period implies probabilities below 0 or above 1. The necessity for censoring does not imply that the described model yields arbitrage.

A.2.3 No-arbitrage argument

The following proof using Arrow-Debreu prices (or state contingent claims) shows that the no arbitrage condition is still valid.

For the proof we assume a simple two-states-two-periods model and use the following notation for the state contingent claims:

Π_u	the price of 1 money unit in case of the state up,
Π_d	the price of 1 money unit in case of the state down.

The following equations are always valid

$$\Pi_u \cdot (FCF_t + u) + \Pi_d \cdot (FCF_t - d) = FCF_t, \tag{A.2.14}$$

$$\Pi_u \cdot (1 + r_f)\, B_t + \Pi_d \cdot (1 + r_f)\, B_t = B_t, \tag{A.2.15}$$

where B_t is the value of a risk-free bond in t. Using Cramer's rule we obtain as solutions

$$\Pi_u = \frac{\begin{vmatrix} FCF_t & FCF_t + d \\ 1 & 1 + r_f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} FCF_t + u & FCF_t + d \\ 1 + r_f & 1 + r_f \end{vmatrix}} = \frac{1}{1 + r_f} \frac{FCF_t \cdot r_f - d}{u - d} \tag{A.2.16}$$

and

$$\Pi_u = \frac{\begin{vmatrix} FCF_t + u & FCF_t \\ 1 + r_f & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} FCF_t + u & FCF_t + d \\ 1 + r_f & 1 + r_f \end{vmatrix}} = \frac{1}{1 + r_f} \frac{u - FCF_t \cdot r_f}{u - d}. \tag{A.2.17}$$

Note that $\frac{FCF_t \cdot r_f - d}{u-d}$ and $\frac{u - FCF_t \cdot r_f}{u-d}$ are in the case of this simplification equal to the risk-neutral probabilities in the case of an up or down movement respectively. Since the following relation for Arrow-Debreu-Prices holds:

$$\sum_{i=1}^{J} \Pi_i = \Pi_u + \Pi_d = \frac{1}{1+r_f}\left(\frac{FCF_t \cdot r_f - d}{u-d} + \frac{u - FCF_t \cdot r_f}{u-d}\right) = \frac{1}{1+r_f}. \quad \text{(A.2.18)}$$

The no arbitrage proof is complete.

A.3 Derivation of terminal value formulas

The value of the unlevered firm V_t^U, with $T \to \infty$, can be derived by using the expressions $\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+z}\right)^s = \frac{1}{z}$ and $\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s}{(1+z)^s} = -\frac{1+z}{z^2}$. Recall that with constant G the expected value of the unlevered free cash flow in period T can be expressed as $E\left[FCF_T^U|\mathcal{F}_t\right] = FCF_t^U + (T-t)G$. The value of the unlevered firm V_t^U, with $T \to \infty$, can be derived by

$$\begin{aligned} V_t^U &= \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{E\left[FCF_s^U\right]}{(1+r^u)^{s-t}} \\ &= \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{FCF_t^U + (s-t)G}{(1+r^u)^{s-t}} \\ &= FCF_t^U \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r^u)^s} + G \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s}{(1+r^u)^s} \\ &= \frac{FCF_t^U}{r^u} + \frac{1+r^u}{(r^u)^2} G. \end{aligned} \quad \text{(A.3.1)}$$

A.4 Derivation of the implied growth rate g_t

Assuming an additive stochastic process according to equation (2.2.13) the FCF^U grow by an absolute amount G per year. The corresponding expected annual growth rate g_t can be calculated for every period t by

$$g_t = \frac{G}{FCF_t^U}. \quad \text{(A.4.1)}$$

The terminal value of the unlevered firm assuming an additive stochastic process as shown in Appendix A.3 is given by

$$V_t^U = \frac{FCF_t^U}{r^u} + \frac{1+r^u}{(r^u)^2}G \tag{A.4.2}$$

and assuming a multiplicative stochastic process[2]

$$V_t^U = \frac{FCF_t^U}{r^u - g_{TV}}, \tag{A.4.3}$$

where g_{TV} is the growth rate in the terminal value phase. Stating the equivalence between equation (A.4.2) and (A.4.3) and solving for g_{TV}, we obtain the following equation for the implied growth rate of the terminal value

$$\begin{aligned} \frac{FCF_t^U}{r^u - g_{TV}} &= \frac{FCF_t^U}{r^u} + \frac{1+r^u}{(r^u)^2}G \\ g_{TV} &= r^u - \frac{FCF_t^U}{\frac{FCF_t^U}{r^u} + \frac{1+r^u}{(r^u)^2}G}. \end{aligned} \tag{A.4.4}$$

The first order derivative of equation (A.4.4) with subject to FCF_t^U is given by

$$\frac{\partial g_{TV}}{\partial FCF_t^U} = -\frac{\frac{1+r^u}{(r^u)^2}G}{\left(\frac{FCF_t^U}{r^u} + \frac{1+r^u}{(r^u)^2}G\right)^2} \tag{A.4.5}$$

Since the unlevered cost-of-capital r^u are usually positive, for $G > 0$ equation (A.4.5) is strictly negative.

[2]For the algebraic derivation of equation (A.4.3) see for example *Kruschwitz* and *Löffler* (2006).

Bibliography

Alexander, David Richard/ Mo, Mengjia and *Stent, Alan Fraser* (2012), Arithmetic Brownian motion and real options, in: European Journal of Operational Research, Vol. 219, p. 114–122.

Arzac, Enrique R. and *Glosten, Lawrence R.* (2005), A Reconsideration of Tax Shield Valuation, in: European Financial Management, Vol. 11, p. 453–461.

Back, Kerry and *Pliska, Stanley R.* (1991), On the fundamental theorem of asset pricing with an infinite state space, in: Journal of Mathematical Economics, Vol. 20, p. 1–18.

Bank, Matthias and *Wibmer, Katrin* (2011), Start-up firm valuation: A real options approach, in: Working Paper, URL `http://ssrn.com/abstract=1928710`.

Baxter, Martin and *Rennie, Andrew* (1996), Financial calculus - An introduction to derivative pricing, Cambridge.

Bingham, Nicholas H. and *Kiesel, Rüdiger* (2004), Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives, 2 Ed., Springer, London.

Black, Fischer and *Scholes, Myron* (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, in: The Journal of Political Economy, Vol. 81, p. 637–654.

Blouin, Jennifer/ Core, John E. and *Guay, Wayne* (2010), Have the tax benefits of debt been overestimated?, in: Journal of Financial Economics, Vol. 98, p. 195–213.

Cox, John C. and *Ross, Stephen A.* (1976), The Valuation of Options for Alternative Stochastic processes, in: Journal of Financial Economics, Vol. 3, p. 145–166.

Cox, John C./ Ross, Stephen A. and *Rubinstein, Mark* (1979), Option Pricing: A simplified Approach, in: Journal of Financial Economics, Vol. 7, p. 229–263.

Dixit, Avinash K. and *Pindyck, Robert S.* (1994), Investment under Uncertainity, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Goldstein, Robert/ Ju, Nengjiu and *Leland, Hayne* (2001), An EBIT-Based Model of Dynamic Capital Structure, in: Journal of Business, Vol. 74, p. 483–512.

Graham, John R. (2000), How Big are the Tax Benefits of Debt?, in: Journal of Finance, Vol. 55, p. 1901–1941.

Grinblatt, Mark and *Liu, Jun* (2008), Debt Policy, Corporate Taxes and Discount Rates, in: Journal of Economic Theory, Vol. 141, p. 225–254.

Hackbarth, Dirk/ Hennesy, Christopher A. and *Leland, Hayne E.* (2007), Can the Trade-off Theory Explain Debt Structure, in: The Review of Financial Studies, Vol. 20, p. 1389–1428.

Harrison, J. Michael and *Kreps, David M.* (1979), Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, in: Journal of Economic Theory, Vol. 20, p. 381–408.

Kruschwitz, Lutz/ Lodowicks, Arnd and *Löffler, Andreas* (2005), Zur Bewertung insolvenzbedrohter Unternehmen, in: Die Betriebswirtschaft, Vol. 65, p. 221–236.

Kruschwitz, Lutz and *Löffler, Andreas* (2006), Discounted Cash Flow - A Theory of the Valuation of Firms, 1 Ed., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester.

Laitenberger, Jörg and *Löffler, Andreas* (2006), The structure of the distributions of cash flows and discount rate in multiperiod valuation problems, in: OR Spectrum, Vol. 28, p. 289–299.

Leland, Hayne E. (1994), Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure, in: The Journal of Finance, Vol. 49, p. 1213–1252.

Massari, Mario/ Roncaglio, Francesco and *Zanetti, Laura* (2007), On the Equivalence between the APV and the Wacc Approach in a Growing Leveraged Firm, in: European Financial Management, Vol. 14, p. 152–162.

Merton, Robert C. (1973a), An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, in: Econometrica, Vol. 41, p. 867–887.

Merton, Robert C. (1973b), Theory of Rational Option Pricing, in: The Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, p. 141–183.

Merton, Robert C. (1974), On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, in: The Journal of Finance, Vol. 29, p. 449–470.

Miles, James A. and *Ezzell, John R.* (1980), The Weighted Average Cost of Capital, Perfect Capital Markets, and Project Life: A Clarification, in: The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 15, p. 719–730.

Miles, James A. and *Ezzell, John R.* (1985), Reformulating Tax Shield Valuation: A Note, in: The Journal of Finance, Vol. 40, p. 1485–1492.

Modigliani, Franco and *Miller, Merton H.* (1958), The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment, in: The American Economic Review, Vol. 48, p. 261–297.

Modigliani, Franco and *Miller, Merton H.* (1963), Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: A Correction, in: The American Economic Review, Vol. 53, p. 433–443.

Mossin, Jan (1966), Equilibrium in a Capital Asset Market, in: Econometrica, Vol. 34, p. 768–783.

Myers, Stewart C. (1974), Interactions of Corporate Financing and Investment Decisions-Implications for Capital Budgeting, in: Journal of Finance, Vol. 29, p. 1–25.

Myers, Stewart C. (1984), The Capital Structure Puzzle, in: Journal of Finance, Vol. 39, p. 575–592.

Nelson, Daniel B. and *Ramaswamy, Krishna* (1990), Simple Binomial Process as Diffusion Approximations in Financial Models, in: The Review of Financial Studies, Vol. 3, p. 393–430.

Schwartz, Eduardo S. and *Moon, Mark* (2000), Rational Pricing of Internet Companies, in: Financial Analysts Journal, Vol. 56, p. 62–75.

Schwartz, Eduardo S. and *Moon, Mark* (2001), Rational Pricing of Internet Companies Revisited, in: The Financial Review, Vol. 36, p. 7–26.

Shreve, Steven E. (2004), Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models (Springer Finance), 1. Ed., Springer, New York.

Streitferdt, Felix (2010), Die Bewertung von Verlustvorträgen und Tax Shields auf arbitragefreien Märkten, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Vol. 80, p. 1041–1074.

3 Die Bewertung der Zinsschranke

Inhaltsverzeichnis

Die Bewertung der Zinsschranke

Sven Arnold, Alexander Lahmann und Bernhard Schwetzler*

* Dipl.-Math. (FH) Sven Arnold und Dipl.-Vw. Alexander Lahmann, Beide Lehrstuhl für Finanzmanagement und Banken, HHL Leipzig Graduate School of Management, Jahnallee 59, 04109 Leipzig. Aktuell befindet sich der Artikel im Begutachtungsprozess bei der Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung mit Status "revised to resubmit".

4 Zinsschranke, Unternehmensbewertung und APV Ansatz – eine Anmerkung zum Beitrag von Förster/ Stöckl/ Brenken (ZfB 2009, S. 985 ff.)

Inhaltsverzeichnis

Zinsschranke, Unternehmensbewertung und APV Ansatz – eine Anmerkung zum Beitrag von Förster/Stöckl/Brenken (ZfB 2009, S. 985 ff.)

Sven Arnold, Alexander Lahmann und Bernhard Schwetzler*

* Dipl.-Math. (FH) Sven Arnold, Dipl.-Vw. Alexander Lahmann, Prof. Dr. Bernhard Schwetzler, alle Lehrstuhl für Finanzmanagement und Banken, HHL Leipzig Graduate School of Management, Jahnallee 59, 04109 Leipzig. Der Artikel wurde mit geringen Änderungen als Diskussionsbeitrag Nr. 116 bei dem Arbeitskreis Quantitative Steuerlehre (ARQUS) im April 2011 veröffentlicht. Die Zeitschrift für Betriebswirtschaft zeigte sich nicht für eine Diskussion offen.

Abstract In einem kürzlich erschienenen ZfB – Beitrag schlagen *Förster et al.* eine Vorgehensweise für die Erfassung der Zinsschranke und ihrer Wirkung auf die zinsinduzierte Steuerersparnis vor. Dieser Beitrag nimmt kritisch dazu Stellung: Es wird gezeigt, dass die dort abgeleiteten Formeln für die Steuerersparnisse nicht konsistent sind und bei positiven Zinsaufwendungen negative Steuerersparnisse zulassen. Die von den Autoren vorgeschlagene Aufspaltung der Steuerersparnisse ist u.E. nicht geeignet die Komplexität des Bewertungsproblems zu verringern: Die Schätzung der erwarteten Steuerersparnisse für die zweite Komponente setzt die Kenntnis der möglichen Entwicklungspfade der Steuerersparnis voraus. Die vorgeschlagene Aufteilung erhöht die Anzahl der zusätzlich zu schätzenden Diskontierungssätze. Schließlich setzt die Ableitung der risikoäquivalenten Diskontierungssätze die Kenntnis des Wertbeitrages bereits voraus.

4.1 Das Problem

Mit der Unternehmenssteuerreform 2008 wurde die Begrenzung der steuerlichen Abzugsfähigkeit von Zinsaufwendungen, die Zinsschranke, eingeführt. In der Literatur zur Unternehmensbewertung hatte dies eine Reihe von Beiträgen zur Folge, die sich mit der Frage beschäftigten, welche Unternehmen von den neuen steuerlichen Regelungen betroffen sind und welche Effekte diese auf den Unternehmenswert haben (vgl. *Mai* (2008); *Blaufus* und *Lorenz* (2009)). *Förster et al.* schlagen einen modifizierten APV Ansatz zur separaten Bewertung von Steuervorteilen vor (vgl. *Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009), S. 985 ff.). Der Barwert der Steuervorteile aus der anteiligen Fremdfinanzierung unter Berücksichtigung der Zinsschranke soll nach dem Vorschlag der Autoren in zwei getrennten Teilen erfasst und ermittelt werden (vgl. *Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009), S. 991 ff.):

- Die erste Komponente TS_t^Z ist der Wert der "periodengerecht ermittelten" Steuerersparnisse durch die steuerliche Abzugsfähigkeit der Zinsaufwendungen. Die Steuerwirkung von Zinsvorträgen durch steuerlich nicht genutzte Zinsaufwendungen der Vorperioden ist hier nicht zu berücksichtigen.
- Die zweite Wertkomponente TS_t^{ZV} entspricht dem Barwert derjenigen Steuerersparnisse, die durch angefallene Zinsvorträge verursacht werden.

Die Autoren begründen die vorgenommene Trennung der Steuerwirkungen mit der Pfadabhängigkeit der Steuerersparnisse im Falle der Berücksichtigung von Zinsvorträgen.[1] Die Abtrennung der Steuerwirkungen der Zinsvorträge begrenze die intertemporale Abhängigkeit der Steuerwirkungen auf diese zweite Komponente und erlaube die Bewertung von TS_t^Z mit den Kapitalkosten des Unternehmens.[2]

Mit dieser Anmerkung möchten wir zeigen, dass der von *Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009) gemachte Vorschlag nicht geeignet ist, die Komplexität des Bewertungsproblems zu reduzieren und die Bewertung der Steuervorteile zu erleichtern.

[1] Vgl. *Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009), S. 996.
[2] Vgl. *Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009), S. 1007.

1. Die von den Autoren zugrunde gelegten Gleichungen für die Ermittlung der Steuerwirkungen sind fehlerhaft. Zinsaufwendungen können zu negativen Steuerersparnissen führen.

2. Ohne Kenntnis eines Binomialbaumes ist die Ermittlung von erwarteten Steuerersparnissen der zweiten Komponente nicht möglich. Kennt man den Binomialbaum, dann ist eine direkte Bewertung der gesamten Steuerersparnisse ohne Trennung in die beiden Komponenten möglich.

3. Die von den Autoren vorgeschlagene Diskontierung der erwarteten Steuerwirkungen über die Ermittlung von risikoäquivalenten Diskontierungssätzen setzt die Kenntnis des Wertbeitrages der Steuerwirkungen und somit die Lösung des Bewertungsproblems voraus. Zudem erfordert der Vorschlag der getrennten Bewertung die Ermittlung von zwei unbekannten Diskontierungszinssätzen, während die direkte Bewertung der Steuervorteile lediglich die Kenntnis eines zusätzlichen Diskontierungssatzes benötigt.

4. Ohne explizite Berücksichtigung der Pfadabhängigkeit lässt sich der Bewertungsvorschlag von *Förster et al.* lediglich als Heuristik für die Wertermittlung interpretieren. Er kann damit kein Ersatz für exaktere Simulationsmodelle sein.

4.2 Die Bewertungsgleichungen von Förster et al.

Ausgangspunkt für die Ableitung des Bewertungsmodelles der Autoren ist die folgende Gleichung zur Ermittlung der gesamten durch die Zinsaufwendungen ausgelösten Steuerwirkung unter Berücksichtigung der Begrenzung der steuerlichen Abzugsfähigkeit durch die Zinsschranke (*Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009), S. 989, Gleichung (8)):[3]

$$TS_t = s \cdot (ZE_t + \min\left[0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1} - ZE_t\right]) \tag{4.2.1}$$

[3] Von der Freigrenze nach §4 Abs. 4 EStG wird hier und im Weiteren abgesehen.

$$TS_t = s \cdot \min[0,3 \cdot EBITDA_t + ZE_t; Z_t + ZV_{t-1}]. \tag{4.2.2}$$

Dabei bezeichnet s den relevanten Unternehmenssteuersatz, EBITDA_t das steuerrechtliche EBITDA für die Periode t, Z_t die Zinsaufwendungen, ZV_{t-1} der Zinsvortrag der Vorperiode t-1 und ZE_t die Zinserträge. Setzt man im Weiteren die Zinserträge ZE_t gleich Null, erhält man

$$TS_t = s \cdot \min\left[0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1}\right]. \tag{4.2.3}$$

In den Gleichungen (4.2.1) bis (4.2.3) wird deutlich, dass wegen $Z_t > 0$ und $ZV_{t-1} > 0$ negative Ausprägungen des EBITDA negative Steuerersparnisse TS_t zur Folge haben. Das ist kein sinnvolles Ergebnis: Bei negativen Steuerbemessungsgrundlagen führen Zinsaufwendungen nicht zu zusätzlichen Steuerzahlungen. Um negative Steuerersparnisse auszuschließen, ist die Gleichung für die gesamten durch Zinsaufwendungen ausgelösten Steuerersparnisse anzupassen.[4] Die korrigierte Fassung lautet:

$$TS_t = s \cdot \max\left[0; \min\left[0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1}\right]\right]. \tag{4.2.4}$$

Das gleiche Problem ergibt sich im Rahmen der von *Förster et al.* vorgenommenen Trennung der Zahlungswirkungen in zwei Komponenten (*Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009), S. 990, Gleichung (9)). In den Formulierungen für beide Komponenten sind negative Steuerersparnisse nicht ausgeschlossen. Notwendige Kriterien für eine korrekte Bewertungsgleichung sind jedoch $TS_t^Z > 0$ und $TS_t^{ZV} > 0$:[5]

1. Die periodengerechte, ausschließlich durch die laufenden Zinsaufwendungen verursachte Komponente der Steuerersparnis ist nach den Autoren definiert

[4] Die Zinsschranke wirkt nur bei positiven steuerlichen EBITDA-Ausprägungen. Die Gleichungen (4.2.1) bis (4.2.3) haben jedoch die Aufgabe, die aus den Zinsaufwendungen resultierenden Steuerwirkungen allgemein abzubilden. Sie müssen somit den Fall, in dem die Zinsschranke greift, ebenso abbilden wie den Fall, in dem sie nicht greift.

[5] Die Verletzung dieser Bedingungen und die Ungleichheit von Gleichung (3) mit der Summe der Gleichungen (5) und (7) wird im Anhang bewiesen.

durch

$$TS_t^Z = s \cdot \min\left[Z_t; \min\left[0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t\right]\right]. \tag{4.2.5}$$

Gleichung (4.2.5) soll die Steuerersparnis auf die Wirkung der Zinsaufwendungen der laufenden Periode unter Berücksichtigung der Zinsschranke erfassen.

Auch hier fehlt offensichtlich eine Untergrenze in Formulierung (4.2.5), die negative Zinsersparnisse ausschließt: $EBITDA_t < 0$ führen zu $TS_t^Z < 0$. Um dies zu verhindern, ist wiederum eine Anpassung der Formel für TS^Z erforderlich. Die korrekte Fassung der Gleichung lautet[6]

$$TS_t^Z = s \cdot \max\left[0; \min\left[0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t\right]\right]. \tag{4.2.6}$$

2. Die zweite Komponente der Steuerersparnis bildet die Wirkung der gegebenenfalls in Vorperioden gebildeten Zinsvorträge ab. Die zugehörige Gleichung der Autoren lautet

$$TS_t^{ZV} = s \cdot \min\left[ZA_t - Z_t; ZV_{t-1}; 0\right]. \tag{4.2.7}$$

Durch Einsetzen von $ZA_t = \min\left[0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1}\right]$ erhält man

$$TS_t^{ZV} = s \cdot \min\left[\min\left[0.3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1}\right] - Z_t; ZV_{t-1}; 0\right]. \tag{4.2.8}$$

Hier ergibt sich das Problem negativer Steuerersparnisse bereits für positive Ausprägungen des EBITDA. Der Minimum-Term innerhalb der Klammer hat offensichtlich die Aufgabe, den nicht genutzten Überhang an möglicher Steuerersparnis der laufenden Periode abzubilden.

- Für den Fall $0,3 \cdot EBITDA_t > Z_t + ZV_{t-1}$ bleibt ein nicht genutztes

[6] Für die Größe TS_t^Z ist ein Beweis nicht notwendig, da der Ausdruck (4.2.6) die Steuerersparnisse unter Anwendung der Zinsschranke bei Vernachlässigung der rekursiv zu bildenden Zinsvorträge ZV_{t-1} abbildet. Im zweiten Teil des Anhangs findet sich ein Beweis, dass die hier hergeleiteten Ausdrücke für TS_t^Z und TS_t^{ZV} in der Summe TS_t ergeben.

Volumen an steuerlicher Abzugsfähigkeit, das gegen einen gegebenenfalls vorhandenen Zinsvortrag verrechnet werden kann und somit zusätzliche Steuerersparnisse erzeugt.

- Gilt $0,3 \cdot EBITDA_t < Z_t + ZV_{t-1}$ greift hingegen die Zinsschranke und es kommt zu keinen weiteren Steuerersparnissen aus gegebenenfalls vorhandenen Zinsvorträgen.

Das Problem an den Gleichungen (4.2.7) und (4.2.8) ist nun, dass Konstellationen $0,3 \cdot EBITDA_t < Z_t$ über $\min\left[0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1}\right] = 0,3 \cdot EBITDA_t$ und $0,3 \cdot EBITDA_t - Z_t < 0$ bereits für positive EBITDA-Ausprägungen zu negativen Steuerersparnissen $TS_t^{ZV} < 0$ führen.[7] Auch hier gilt, dass Zinsaufwendungen bzw. damit verbundene Zinsvorträge keine zusätzlichen Steuerzahlungen auslösen können und somit negative Steuerersparnisse auszuschließen sind. Gleichung (4.2.8) ist entsprechend so anzupassen, dass der Fall $TS_t^{ZV} < 0$ nicht auftreten kann. Die entsprechend korrigierte Formulierung[8] für den periodischen Steuervorteil aus gegebenenfalls vorhandenen Zinsvorträgen lautet

$$TS_t^{ZV} = s \cdot \max\left[0; \min\left[0,3 \cdot EBITDA_t - Z_t; ZV_{t-1}\right]\right]. \qquad (4.2.9)$$

Gleichung (4.2.9) stellt sicher, dass die Steuerwirkung immer positiv ist und ein gegebenenfalls verbleibender, nicht genutzter steuerlicher Abzugsbetrag $0,3 \cdot EBITDA_t - Z_t$ gegen den gegebenenfalls vorhandenen Zinsvortrag ZV_{t-1} verrechnet werden kann.

4.3 Zur Notwendigkeit der Trennung der beiden Komponenten

Ein zentrales Ergebnis des Beitrages von *Förster et al.* ist, dass die Steuerwirkungen von Zinsaufwendungen unter Berücksichtigung der Zinsschranke in zwei Komponenten getrennt werden sollten:

[7] Siehe Beweis im Anhang Fall 2.
[8] Ein Beweis für Gleichung (4.2.9) findet sich im Anhang.

- Die “periodengerecht realisierten” Steuervorteile aus der direkten Abzugsfähigkeit der Zinsaufwendungen in der laufenden Periode.

- Die Steuervorteile aus der Realisierung und Nutzung eines gegebenenfalls vorhandenen Zinsvortrages.

Die Notwendigkeit der Trennung wird mit der Pfadabhängigkeit der Steuerersparnisse begründet. Unterschiedliche Risikoeigenschaften der beiden Komponenten machen die Anwendung von unterschiedlichen risikoäquivalenten Diskontierungssätzen für die entsprechenden Steuervorteile erforderlich (*Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009), S. 991 ff.). In einem Beispiel werden von den Autoren unterschiedliche zeit- und zustandsabhängige Diskontierungssätze für beide Komponenten abgeleitet.[9]

Die von *Förster et al.* vorgeschlagene Trennung der Steuerwirkungen ist aus unserer Sicht nicht geeignet, die Komplexität des Bewertungsproblems zu reduzieren und die Bewertung der Steuervorteile aus der anteiligen Fremdfinanzierung zu erleichtern. Sollen mit Hilfe des vorgeschlagenen Modells korrekte Ergebnisse erzielt werden, ist die explizite Einbeziehung der Pfadabhängigkeit und somit die Kenntnis des Binomialbaumes erforderlich. Ist dieser bekannt, so kann der Wertbeitrag der Steuerersparnisse direkt und ohne die vorgeschlagene Aufspaltung mit Hilfe risikoneutraler Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden.

4.3.1 Ein Binomialbaumbeispiel

Um unsere Argumentation zu verdeutlichen, stützen wir uns im Weiteren auf ein Zahlenbeispiel eines Binomialbaumes über 4 Perioden. Die grundlegenden Daten des Beispiels sind in der folgenden Tabelle 4.3.1 zusammengefasst:

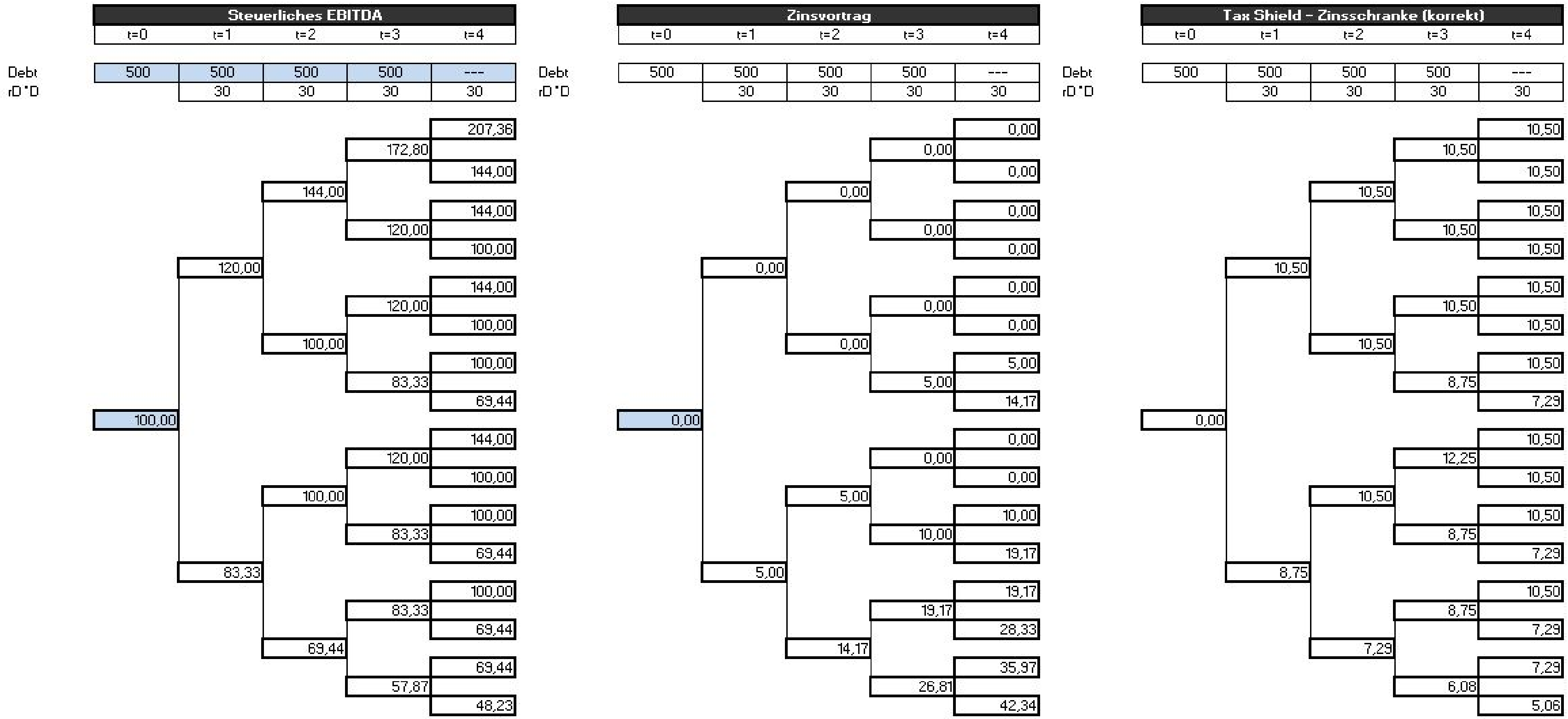
[9] Gleichung (14) und (15) für die Steuerersparnisse TS_t^Z; für die Steuerersparnisse TS_t^{ZV} wird keine Gleichung angegeben. *Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009), S. 993.

Tabelle 4.1: Variablen des vierperiodigen Binomialbaumes.

Exogene Variablen	
Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung	$p_u = 0,6$
Aufwärtsbewegung	$u = 1,2$
Zinsertrag	$ZE = 0$
risikoloser Zinssatz	$i = 0,06$
Fremdkapitalkosten	$r_D = 0,06$
Unternehmenssteuersatz	$\tau = 0,35$
Endogene Variablen	
Wahrscheinlichkeit für eine Abwärtsbewegung	$p_d = 0,4$
Risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung	$q_u = 0,61818182$
Risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für eine Abwärtsbewegung	$q_d = 0,38181818$
Abwärtsbewegung	$d = \frac{1}{1,2}$
Wachstumsrate	$g = 0,05333333$

Die folgende Abbildung 4.1 zeigt die Entwicklung des steuerlichen EBITDA, der durch die Zinsaufwendungen ausgelösten Steuerersparnisse und der Zinsvorträge über die verschiedenen Knoten des Binomialbaumes. Bei der Ermittlung der steuerlichen Wirkungen wurden neben der Zinsschrankenregelung auch gegebenenfalls vorhandene Zinsvorträge einbezogen. Da die Pfadabhängigkeit der Steuerersparnisse über die Baumstruktur berücksichtigt wird, wurde auf die Aufspaltung der Steuerersparnis TS_t in die beiden Komponenten verzichtet. Die Bestimmung der Steuerersparnis erfolgt auf der Basis der Gleichung (4.2.4).

Abbildung 4.1: Ermittlung der gesamten Steuerersparnisse und Zinsvorträge ZV_{t-1} mit Hilfe eines Binomialbaumes.



E_P[EBITDA]	100,00	105,333333	110,951111	116,868504	123,101491
E_Q[EBITDA]	100,00	106	112,36	119,1016	126,247696

E_P[ZV]	0,00	2	3,46666667	4,99555556	6,80118519
E_Q[ZV]	0,00	1,90909091	3,24545455	4,57124718	6,16306612

E_P[TS]	0,00	9,8	9,98666667	9,96488889	9,86802963
E_Q[TS]	0,00	9,83181818	10,0322727	10,0359726	9,94286337

Die Bewertung der Steuerersparnisse erfolgt im ersten Schritt mit Hilfe der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten. Die folgende Tabelle 4.2 zeigt die entsprechenden Erwartungswerte $\mathrm{E_Q}$ und die Ermittlung des Barwertes der Steuerersparnis mit Hilfe des risikolosen Zinssatzes:

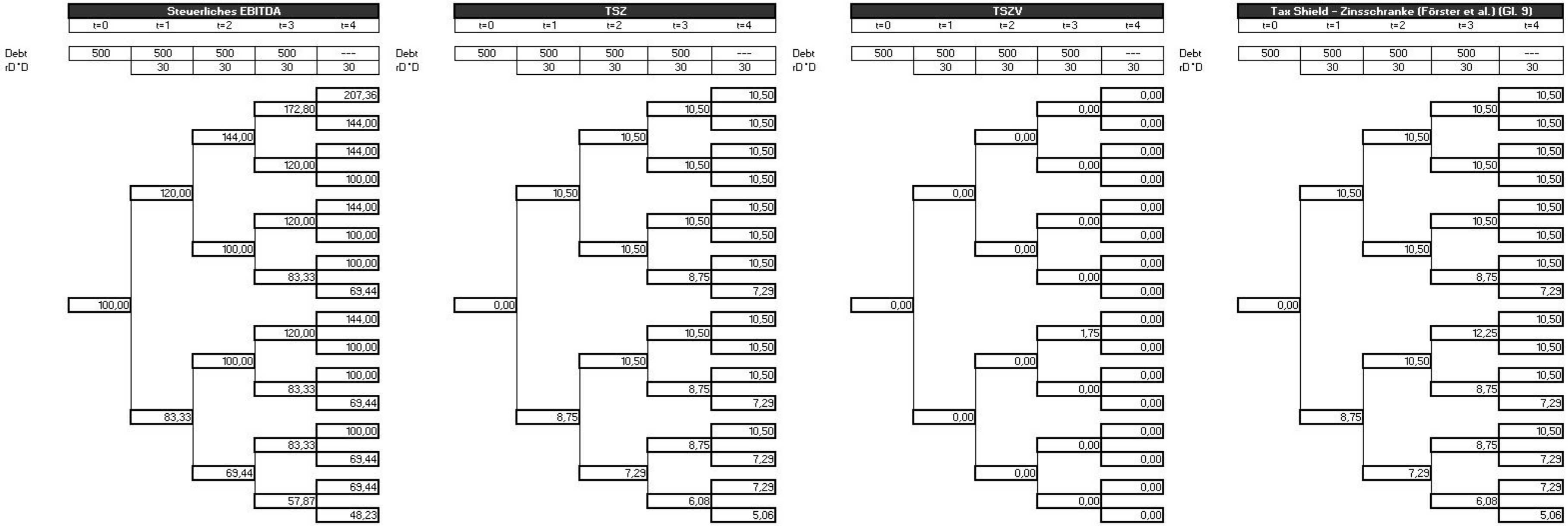
Tabelle 4.2: Ermittlung des Barwertes der Steuerersparnis (Tax Shield).

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$E_Q[TS]$		9,83181818	10,0322727	10,0359726	9,94286337
$PV[E_Q[TS]]$		9,27530017	8,92868701	8,4263961	7,87567907
VTS	34,5060624				

Das Beispiel macht den Vorzug der risikoneutralen Bewertung deutlich: Die Pfadabhängigkeit wird im Rahmen des Binomialbaumes über die zustandsabhängigen Steuerersparnisse berücksichtigt. Die unter Verwendung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ermittelten Erwartungswerte der Steuerersparnisse können dann mit dem risikolosen Zinssatz bewertet werden.

Im Weiteren wird in einem zweiten Schritt der Wert der Steuerersparnisse basierend auf dem Vorschlag von *Förster et al.* ermittelt. Auf Grundlage des Binomialbaumes von oben werden die künftigen EBITDA, Steuerbemessungsgrundlagen und Zinsvorträge sowie die beiden Komponenten der Steuerersparnisse TS_t^{ZV} und TS_t^{Z} getrennt berechnet. Die Ermittlung der beiden Komponenten erfolgt auf der Basis der oben abgeleiteten, korrigierten Gleichungen (4.2.6) und (4.2.9). Die folgende Abbildung 4.2 zeigt die Berechnung der beiden Komponenten mit Hilfe des Binomialbaumes.

Abbildung 4.2: Ermittlung der beiden Komponenten TS_t^Z und TS_t^{ZV} anhand der korrigierten Gleichungen (4.2.6) und (4.2.9)



E_P[EBITDA]	100,00	105,333333	110,951111	116,868504	123,101491
E_Q[EBITDA]	100,00	106	112,36	119,1016	126,247696

E_P[TSZ]	0,00	9,8	9,98666667	9,71288889	9,86802963
E_Q[TSZ]	0,00	9,83181818	10,0322727	9,78062772	9,94286337

E_P[TSZV]	0,00	0,00	0,00	0,252	0,00
E_Q[TSZV]	0,00	0,00	0,00	0,25534485	0,00

E_P[TS]	0,00	9,8	9,98666667	9,96488889	9,86802963
E_Q[TS]	0,00	9,8318182	10,0322727	10,0359726	9,94286337

Die folgende Tabelle verdeutlicht die Wertermittlung über die Berechnung der Erwartungswerte basierend auf den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten und die Zerlegung der gesamten Steuerersparnis in die beiden Komponenten TS_t^Z und TS_t^{ZV}.

Tabelle 4.3: Korrigierte Zerlegung der Steuerersparnis.

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$E_Q[TS^Z]$		9,83181818	10,03227273	9,78062772	9,94286337
$E_Q[TS^{ZV}]$				0,25534485	
$E_Q[TS]$		9,83181818	10,03227273	10,03597258	9,94286337
$PV[E_Q[TS]]$		9,27530017	8,92868701	8,42639610	7,87567907
VTS	34,50606236				

Das Beispiel macht deutlich, dass bei Kenntnis des Binomialbaumes und Anwendung der korrigierten Gleichungen beide Verfahren zum gleichen Resultat führen.

4.3.2 Anmerkungen zum Vorschlag von Förster et al.

Anhand des Zahlenbeispiels lassen sich nun unsere Kritikpunkte an dem Vorschlag von *Förster et al.* verdeutlichen. Der Kern unserer Kritik lautet, dass zur korrekten Wertermittlung der Steuervorteile nach dem Vorschlag der Autoren die Pfadabhängigkeit der Steuerwirkungen explizit zu berücksichtigen und somit die Kenntnis des Binomialbaumes erforderlich ist. Eine exakte Bewertung ist auch ohne die Trennung der beiden Komponenten möglich, sobald der Binomialbaum bekannt ist. Ohne die Einbeziehung der Pfadabhängigkeit ist insbesondere die zweite Komponente TS_t^{ZV} nicht zu bewerten. Zum Zweiten ist für die von den Autoren vorgeschlagene Ermittlung von risikoäquivalenten Diskontierungssätzen für die Bewertung der erwarteten Steuerersparnisse für beide Komponenten bereits die Kenntnis der jeweiligen Wertbeiträge erforderlich.

1. Ohne Berücksichtigung der Pfadabhängigkeit ist insbesondere der Wert der zweiten Komponente TS_t^{ZV} im Modell von *Förster et al.* nicht zu bestimmen.

Die Pfadabhängigkeit der Steuerwirkungen hat nicht nur Auswirkungen auf die Höhe der Kapitalkosten zur Diskontierung der Steuervorteile aus gegebenenfalls vorhandenen Zinsvorträgen. Sie beeinflusst auch die Höhe der erwarteten und zu bewertenden Steuerersparnisse selbst. Leider machen die Autoren keine Angaben darüber, wie die Schätzung der künftigen erwarteten Steuerwirkungen aussehen könnte.

Ohne eine explizite Modellierung der Pfadabhängigkeit mit Hilfe eines Binomialbaumes ist insbesondere die Berechnung der erwarteten, durch Zinsvorträge verursachten künftigen Steuerersparnisse $E\left[TS_t^{ZV}\middle|\mathcal{F}_0\right]$ nicht möglich. Das wird indem o.a. Zahlenbeispiel deutlich: Abbildung 4.2 zeigt, dass über die vier betrachteten Perioden lediglich in einem einzigen Knoten (duu in t=3) eine durch Zinsvorträge verursachte Steuerersparnis eintritt: Bei einer EBITDA-Ausprägung von 120 und einem Zinsaufwand von 30 kommt es zunächst wegen $\min(0,3\cdot EBITDA_t;Z_t) = \min(0,3\cdot 120;30) = 30$ zur gesamten Nutzung des Zinsaufwandes der laufenden Periode. Die erste Komponente der Steuerersparnis beträgt $TS^Z = 0,35\cdot 30 = 10,5$. Es verbleibt noch eine nicht genutzte Steuerersparnis in Höhe von 5, da $\max\left[0;\min\left[0,3\cdot EBITDA_t - Z_t;ZV_{t-1}\right]\right] = \max\left[0;\min\left[0.3\cdot 120-30;5\right]\right]$ gilt und damit der Zinsvortrag der Vorperiode vollständig genutzt wird. Daraus resultiert eine zustandsabhängige Steuerersparnis TS_t^{ZV} in Höhe von $5\cdot 0,35 = 1,75$. Der für die Wertermittlung notwendige Erwartungswert $E_P\left[TS_3^{ZV}\middle|\mathcal{F}_0\right]$ beträgt 0,252. Das Beispiel macht deutlich, dass es auch bei Kenntnis des Prozesses der künftigen EBITDA-Entwicklung und der künftigen Zinsaufwendungen ohne die Entwicklung eines Binomialbaumes unmöglich ist, den Erwartungswert der künftigen Steuerersparnisse aus der zweiten Komponente $E\left[TS_t^{ZV}\middle|\mathcal{F}_0\right]$ für die künftigen Perioden zu schätzen.

Daraus ergeben sich zwei wichtige Konsequenzen:

- Ohne Kenntnis des zugrundeliegenden Binomialbaumes mit den entsprechenden Zinsvorträgen ist jeder Vorschlag zur Berechnung von $E\left[TS_t^{ZV}\middle|\mathcal{F}_0\right]$ allenfalls eine Heuristik, die zu Näherungslösungen führt. Leider fehlt in den Ausführungen von *Förster et al.* eine Aussage, wie eine solche Heuristik zur Schätzung von $E\left[TS_t^{ZV}\middle|\mathcal{F}_0\right]$ ohne Rückgriff auf einen Binomialbaum aussehen könnte. Ohne einen expliziten Vorschlag kann die Qualität einer solchen

Heuristik nicht beurteilt werden.

- Bei Kenntnis des Binomialbaumes ist eine präzise Bewertung der Steuervorteile aus gegebenenfalls vorhandenen Zinsvorträgen möglich. Dann ist allerdings keine Heuristik mehr erforderlich. In diesem Fall ist auch die geforderte Trennung in die beiden Komponenten überflüssig. Man kann einfach die gesamte Steuerersparnis ermitteln und bewerten.

2. Der Vorschlag von *Förster et al.* setzt die Kenntnis des Wertbeitrages der beiden Komponenten bereits voraus. Er erhöht die Komplexität des Bewertungsproblems, da nun für beide Komponenten der Steuerersparnis unterschiedliche risikoäquivalente Diskontierungssätze zu suchen sind, die beide nicht mit den Unternehmenskapitalkosten bei Eigenfinanzierung übereinstimmen. Die direkte Bewertung der gesamten Steuerersparnis erfordert hingegen lediglich die Bestimmung eines zusätzlichen Diskontierungssatzes.

Das Vorgehen von *Förster et al.* erfordert die Bestimmung von risikoäquivalenten Diskontierungssätzen zur Bewertung der erwarteten Steuerersparnisse der beiden Komponenten. Die Begrenzung der steuerlichen Zinsabzugsfähigkeit durch die Höhe der erzielten Steuerbemessungsgrundlage und durch die Zinsschranke führt dazu, dass die durch den Zinsaufwand ausgelösten Steuerersparnisse Optionscharakter aufweisen. Für die gesamten Steuerersparnisse TS_t und die beiden Komponenten TS_t^{ZV} und TS_t^{Z} können deshalb wegen der abweichenden Risikoeigenschaften nicht mehr die Unternehmenskapitalkosten als Diskontierungssatz verwendet werden.[10] Möchte man den Barwert der Steuerersparnisse mit Hilfe von risikoangepassten Diskontierungssätzen ermitteln, ist man somit gezwungen, zusätzlich zu den Unternehmenskapitalkosten noch zeit- und zustandsabhängige Diskontierungssätze für die Steuerersparnisse zu bestimmen, nachdem bereits der korrekte Wert von $PVTS^Z$ unter

[10]Für Verlustvorträge generell vgl. *Piehler* und *Schwetzler* (2010).

dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ ermittelt wurde. In ihren Zahlenbeispielen ermitteln die Autoren diese Diskontierungssätze, indem sie auf die zuvor mit Hilfe der risikoneutralen Bewertung ermittelten Ergebnisse zurückgreifen: Sie berechnen den risikoangepassten Zinsfuß, bei dessen Anwendung der gleiche Wertbeitrag resultiert (*Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009), S. 993, Gleichungen (14) und (15)). Insofern ist die von den Autoren geäußerte Kritik an der risikoneutralen Bewertung nicht fair; ihre eigenen Ergebnisse beruhen auf den mit diesem Verfahren gewonnenen Ergebnissen.

Selbst wenn man dem Vorgehen der Autoren folgt, die Bewertung mit Hilfe von risikoangepassten Diskontierungssätzen vorzunehmen, erhöht sich die mit der Bewertung der Steuervorteile verbundene Komplexität durch die vorgeschlagene Trennung der beiden Komponenten. Bei einer direkten Bewertung der gesamten Steuerersparnisse TS_t sind neben den Unternehmenskapitalkosten zusätzlich risikoangepasste Diskontierungssätze für diese zusätzliche Wertkomponente zu ermitteln. Der Vorschlag der Autoren erfordert jedoch die Ermittlung zweier zusätzlicher Diskontierungssätze:

- Die korrekte Bewertung der "periodengerecht realisierten" Steuerersparnisse TS_t^Z erfordert einen von den Unternehmenskapitalkosten abweichenden Diskontierungssatz. Die Begrenzung der maximalen Zinsabzugsfähigkeit auf positive realisierte Steuerbemessungsgrundlagen aufgrund von $\min[0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t]$ führt dazu, dass die Steuerersparnisse bereits im einperiodigen Fall ohne die Berücksichtigung von Zinsvorträgen Optionscharakter[11] aufweisen und daher die Unternehmenskapitalkosten nicht mehr anwendbar sind. Zwar ist die Aussage der Autoren korrekt, dass die Pfadabhängigkeit der Steuerersparnisse auf die zweite Komponente TS_t^{ZV} begrenzt ist (*Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009), S. 996). Jedoch führt dies nicht dazu, dass die Kapitalkosten des Unternehmens auf TS_t^Z angewendet werden können.

[11] *Arnold* und *Lahmann* (2010) nehmen die Bewertung der Zinsschranke in einem Optionsmodell vor, welches eine analytische und numerische Lösung anbietet.

Dies wird auch im Beispiel der Autoren deutlich: Für die korrekte Wertermittlung von TS_t^Z wird für die periodengerecht realisierten Steuervorteile mit 5,3% ein Kapitalkostensatz ermittelt, der deutlich von den Unternehmenskapitalkosten bei Eigenfinanzierung (9,14%) abweicht (*Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009), S. 993). Am Ende schlagen die Autoren trotzdem die Bewertung von TS_t^Z mit Hilfe der Unternehmenseigenkapitalkosten bei Eigenfinanzierung vor (vgl. *Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009), S. 1007).

- Schließlich benötigt man für die Diskontierung der mit gegebenenfalls vorhandenen Zinsvorträgen verbundenen Steuervorteile TS_t^{ZV} aufgrund der Pfadabhängigkeit zeit- und zustandsabhängige Diskontierungszinssätze, die ebenfalls von den Unternehmenskapitalkosten abweichen.

Im Ergebnis erhöht der Vorschlag von *Förster et al.* den Berechnungsaufwand für die Bestimmung der risikoäquivalenten Kapitalkosten.

3. Ohne die explizite Berücksichtigung der Pfadabhängigkeit ist eine exakte Bewertung der Steuervorteile nicht möglich. Der Vorschlag der Autoren ist dann lediglich als Heuristik zur Wertfindung zu interpretieren. Er ist somit nicht in der Lage, auf Binomialbäumen basierende Bewertungsmodelle oder Simulationsmodelle zur exakten Wertermittlung zu ersetzen.

Zur exakten Wertermittlung ist auch nach dem Vorschlag von *Förster et al.* die Berücksichtigung der Pfadabhängigkeit der Steuervorteile erforderlich. Wird diese mit Hilfe eines Binomialbaumes erfasst, ist eine direkte und exakte Bewertung der gesamten Steuervorteile möglich und die von den Autoren vorgeschlagene Trennung in die beiden Komponenten überflüssig. Im Gegensatz dazu liefert eine optionspreistheoretische Bewertung des Steuervorteils exakte Ergebnisse, ohne dass man gezwungen wäre, auf Heuristiken auszuweichen.[12]

[12] Vgl. z.B. das Modell von *Arnold* und *Lahmann* (2010). Bereits *Mai* (2008) zeigte die Bewertung des Tax Shields unter Berücksichtigung der Zinsschranke im APV-Modell unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$.

Über längere Modelllaufzeiten sind Binomialbäume regelmäßig nicht mehr handhabbar. Auch dies führt noch nicht zur Notwendigkeit, auf Heuristiken für die Wertbestimmung zurückzugreifen. Simulationsmodelle ermöglichen die Wertermittlung auch über längere Zeiträume und wenn keine analytische Lösung möglich ist.[13]

4.4 Fazit

Die neuen steuerlichen Regelungen haben die Bewertung des Steuervorteils aus der anteiligen Fremdfinanzierung erheblich kompliziert. *Förster et al.* haben einen Vorschlag zur Lösung dieses Problems entwickelt. Mit dieser Anmerkung möchten wir auf einige Probleme hinweisen, die mit diesem Vorschlag verbunden sind: Die Gleichungen für die Ermittlung der steuerlichen Vorteile sind korrekturbedürftig, weil sie für negative EBITDA bzw. für das Greifen der Zinsschranke und damit auch für positive Ausprägungen des EBITDA negative Steuerersparnisse zur Folge haben. Die Trennung der zu bewertenden Steuervorteile in zwei Komponenten ist u.E. nicht geeignet, die Komplexität des Bewertungsproblems zu verringern: Der Vorschlag von *Förster et al.* erfordert die Kenntnis bzw. Ermittlung von zwei unterschiedlichen Diskontierungssätzen. Für deren Bestimmung greifen die Autoren selbst auf bereits vorliegende Ergebnisse der risikoneutralen Bewertung zurück. Zudem erfordert die Schätzung der erwarteten Steuervorteile aus der zweiten Komponente die Berücksichtigung der Pfadabhängigkeit. Schließlich ist die mit dem Vorschlag verbundene Heuristik zur Wertermittlung überflüssig, wenn ein Binomialmodell oder ein Simulationsmodell verwendet werden kann, das in der Lage ist, die Pfadabhängigkeit korrekt zu erfassen.

[13] Eine Bewertung des Einflusses der Zinsschranke auf das Tax Shield mit Hilfe eines Simulationsmodells findet sich beispielsweise in *Arnold* und *Lahmann* (2010).

Anhang C

C.1 Beweis der Inkonsistenz der Gleichungen für die Steuerersparnisse von Förster et al.

Die Summe der beiden Komponenten TS_t^Z und TS_t^{ZV} muss die gesamte Steuerersparnis TS ergeben. Die Gleichung für TS lautet nach *Förster et al.*

$$TS_t = s \cdot \min\left(0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1}\right) \tag{C.1.1}$$

und es lassen sich die folgenden Fälle ermitteln

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{s} TS_t &= \min\left(0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1}\right) \\ &= \begin{cases} 0,3 \cdot EBITDA_t & , \mathit{falls}\ 0,3 \cdot EBITDA_t < 0 < Z_t + ZV_{t-1} \\ 0,3 \cdot EBITDA_t & , \mathit{falls}\ 0 < 0,3 \cdot EBITDA_t < Z_t + ZV_{t-1} \\ Z_t + ZV_{t-1} & , \mathit{falls}\ 0 < Z_t + ZV_{t-1} < 0,3 \cdot EBITDA_t \end{cases} \end{aligned} \tag{C.1.2}$$

Die Gleichungen für TS_t^Z und TS_t^{ZV} nach *Förster et al.* lauten

$$\begin{aligned} TS_t^Z &= \min\left[Z_t; \min\left(0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t\right)\right], \\ TS_t^{ZV} &= \min\left[\min\left(0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1}\right) - Z_t; ZV_{t-1}; 0\right]. \end{aligned} \tag{C.1.3}$$

Im Folgenden wird nachgewiesen, dass die Summe über TS_t^Z und TS_t^{ZV} nicht mit der Gleichung (C.1.2) für TS_t übereinstimmt:

$$
\begin{aligned}
TS_t &= TS_t^Z + TS_t^{ZV} \\
TS_t &= s \cdot \left(\min\left[Z_t; \min\left(0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t\right)\right] + \min\left[\min\left(0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1}\right) - Z_t; ZV_{t-1}; 0\right]\right) && \text{(C.1.4)} \\
\tfrac{1}{s} TS_t &= \min\left[Z_t; \min\left(0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t\right)\right] + \min\left[\min\left(0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1}\right) - Z_t; ZV_{t-1}; 0\right]
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases}
0,6 \cdot EBITDA - Z_t < 0 & \text{, falls } \; 0,3 \cdot EBITDA_t < 0 < Z_t < Z_t + ZV_{t-1} \\
0,6 \cdot \mathrm{EBITDA}_t - Z_t \begin{cases} < 0, \; \text{falls } 0,6 \cdot EBITDA_t < Z_t \\ > 0, \; \text{falls } 0,6 \cdot EBITDA_t > Z_t \end{cases} & \text{, falls } \; 0 < 0,3 \cdot EBITDA_t < Z_t < Z_t + ZV_{t-1} \\
\mathrm{Z}_t & \text{, falls } \; 0 < Z_t < 0,3 \cdot EBITDA_t < Z_t + ZV_{t-1} \\
\mathrm{Z}_t & \text{, falls } \; 0 < Z_t < Z_t + ZV_{t-1} < 0,3 \cdot EBITDA_t
\end{cases}
$$

Offensichtlich entspricht bei *Förster et al.* die Gleichung für TS_t nicht der Summe der Gleichungen für TS_t^{ZV} und TS_t^Z. Weiterhin zeigt dies, dass bereits für $EBITDA_t > 0$ negative Steuerersparnisse $TS_t < 0$ auftreten können. Gilt $0,3 \cdot EBITDA_t > Z_t$ betragen die Steuerersparnisse exakt $s \cdot Z_t$. Vergleicht man die letzten beiden Fälle von Gleichung (C.1.4) mit dem letzten Fall von Gleichung (C.1.2), lässt sich erkennen, dass selbst positive Werte für ZV_{t-1} keinen Einfluss auf den Wert von TS_t haben, obwohl dies gemäß der Definition der Zinsabzugsbeschränkung aus Gleichung (C.1.2) der Fall sein müsste.

C.2 Beweis von Gleichung (4.2.9)

Unter Verwendung der Gleichungen (4.2.4) und (4.2.6) folgt Gleichung (4.2.9):

$$
\begin{aligned}
TS_t &= TS_t^Z + TS_t^{ZV} \\
TS_t^{ZV} &= TS_t - TS_t^Z \\
TS_t^{ZV} &= s \cdot \left(\max\left[0; \min\left(0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1}\right)\right] - \max\left[0; \min\left(0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t\right)\right]\right) \\
\tfrac{1}{s} TS_t^{ZV} &= \max\left[0; \min\left(0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t + ZV_{t-1}\right)\right] - \max\left[0; \min\left(0,3 \cdot EBITDA_t; Z_t\right)\right] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{, falls } \; 0,3 \cdot EBITDA_t < 0 < Z_t < Z_t + ZV_{t-1} \\ 0 & \text{, falls } \; 0 < 0,3 \cdot EBITDA_t < Z_t < Z_t + ZV_{t-1} \\ 0,3 \cdot EBITDA_t - Z & \text{, falls } \; 0 < Z_t < 0,3 \cdot EBITDA_t < Z_t + ZV_{t-1} \\ 0 & \text{, falls } \; 0 < Z_t < Z_t + ZV_{t-1} < 0,3 \cdot EBITDA_t \end{cases}
\end{aligned}
\tag{C.2.1}
$$

Literaturverzeichnis

Arnold, Sven und *Lahmann, Alexander* (2010), Bewertung der Zinsschranke, verfügbar bei `http://ssrn.com/abstract=1567523`.

Blaufus, Kay und *Lorenz, Daniela* (2009), Wem droht die Zinsschranke? Eine empirische Untersuchung zur Identifikation der Einflussfaktoren, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 79, S. 503–526.

Förster, Heinrich H./ Stöckl, Stefan und *Brenken, Henner* (2009), Die Bedeutung der Zinsschranke für die Bewertung von Tax Shields in einem modifizierten APV-Ansatz unter Verwendung einer entsprechend angepassten Eigenkapitalkosten-Reaktionshypothese, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 79, S. 985–1018.

Mai, Jan M. (2008), Die Bewertung verschuldeter Unternehmen unter Berücksichtigung von Zinsabzugsbeschränkungen, in: Die Betriebswirtschaft, Jg. 68, S. 35–51.

Piehler, Maik und *Schwetzler, Bernhard* (2010), Der Wert ertragsteuerlicher Verlustvorträge, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 62, S. 60–100.

5 Der Einfluss der “Zinsschranke” auf den Unternehmenswert - eine Anmerkung

Inhaltsverzeichnis

Der Einfluss der “Zinsschranke” auf den Unternehmenswert - eine Anmerkung

Sven Arnold, Alexander Lahmann und Bernhard Schwetzler*

* Dipl.-Math. (FH) Sven Arnold, Dipl.-Vw. Alexander Lahmann, Prof. Dr. Bernhard Schwetzler, Alle Lehrstuhl für Finanzmanagement und Banken, HHL Leipzig Graduate School of Management, Jahnallee 59, 04109 Leipzig. Der Artikel wurde mit geringen Anpassungen in der Zeitschrift “Corporate Finance biz” (5/2011, S. 293 - 299) veröffentlicht.

6 Tax Shield, Insolvenz und Zinsschranke

Inhaltsverzeichnis

Tax Shield, Insolvenz und Zinsschranke

Sven Arnold, Alexander Lahmann und Bernhard Schwetzler*

* Dipl.-Math. (FH) Sven Arnold, Dipl.-Vw. Alexander Lahmann, Prof. Dr. Bernhard Schwetzler, alle Lehrstuhl für Finanzmanagement und Banken, HHL Leipzig Graduate School of Management, Jahnallee 59, 04109 Leipzig. Der vorliegende Beitrag befindet sich aktuell im Status “Working Paper”.

Abstract Dieser Beitrag analysiert den Wertbeitrag fremdfinanzierungsbedingter Steuervorteile (Tax Shield) unter realistischen Bedingungen (keine Negativsteuer, Möglichkeit einer Insolvenz) für unterschiedliche Finanzierungspolitiken. Zusätzlich wird der Effekt der Zinsabzugsbeschränkung (Zinsschranke) auf den Wert des Tax Shield ermittelt. Die Bewertung des Tax Shield mit und ohne Zinsschranke findet bei Betrachtung von einem Jahr auf der Basis von Optionsmodellen und im mehrperiodigen Kontext auf der Basis von Monte-Carlo-Simulationsmodellen statt. Bei letzterem wird die Konvergenz zu den Tax Shield-Formeln bei autonomer und wertorientierter Finanzierungspolitik hergestellt. Es zeigt sich, dass der Wegfall der Negativsteuer und die Einführung einer möglichen Insolvenz zu deutlichen Abweichungen der gefundenen Werte von den Werten der Tax Shield-Formeln führt. Dagegen ist der zusätzliche Effekt der Zinsschranke für beide Finanzierungspolitiken zu vernachlässigen.

6.1 Einleitung

Mit der Unternehmenssteuerreform 2008 wurde die Begrenzung der steuerlichen Abzugsfähigkeit von Zinsaufwendungen, die sogenannte Zinsschranke, eingeführt. Ziel des Gesetzgebers war die Verringerung der steuerlichen Anreize der Fremdfinanzierung. Die Regelung sollte einer "übermäßigen Fremdkapitalfinanzierung" deutscher Unternehmen entgegenwirken.[1] Aus der Praxis hatten die Regelungen eine Serie von kritischen Stimmen zur Folge, die vor deutlichen Wertverlusten betroffener Unternehmen warnten.[2] Eine paradoxe Wirkung der Zinsschranke beschreibt *Pasedaq*, bei der Steuerersparnisse durch die Zinsschranke erhöht werden können.[3]

Übermäßig fremdfinanzierte Unternehmen können von Insolvenz bedroht sein. Daher ist es zweckmäßig diese zuerst zu prüfen und im zweiten Schritt die Zinsschrankenregelung zu untersuchen. Die ökonomischen Effekte der Zinsschrankenregelung und der Insolvenz für Unternehmenseigentümer lassen sich anhand der Minderung von fremdfinanzierungsbedingten Steuervorteile (Tax Shield) messen. In diesem Beitrag wird daher ein komplettes DCF-Modell entwickelt, wobei unterschiedliche Annahmen diskutiert werden: (i) Modell mit unterschiedlichen Finanzierungspolitiken und akademischen Annahmen, (ii) Wegfall der Negativsteuer, (iii) Einführung von Insolvenz und Rating, sowie (iv) Einführung der Zinsschrankenregelung. Bei allen Szenarien lässt sich die Nächstjahres-Steuerersparnis im Modell auf Basis von optionstheoretischen Formeln ableiten. Die Bewertung mehrjähriger Steuervorteile im Modell mit komplexeren Annahmen müssen anhand einer Monte-Carlo-Simulation durchgeführt werden.

In der einschlägigen Literatur zur Unternehmensbewertung ist die Wirkung der Zinsschrankenregelung bereits untersucht worden, wobei Insolvenz und Finanzierungspolitik nicht ausreichend Beachtung finden. *Eberl* analysiert die Effekte unter Berücksichtigung der persönlichen Einkommensteuer getrennt für den Fall, dass

[1] Vgl. BR-Drucksache 220/07, S. 53.
[2] Vgl. beispielsweise *Lenz* und *Dörfler* (2010) oder auch *Kessler* und *Dietrich* (2010).
[3] Vgl. *Pasedaq* (2010).

die Zinsschranke greift und den Fall, dass sie nicht greift. Er verweist darauf, dass für den Fall mehrperiodiger Steuerersparnisse die Pfadabhängigkeit des Eintretens der Zinsschranke deren explizite Modellierung erfordert.[4] *Mai* modelliert diese Pfadabhängigkeit anhand eines zweiperiodigen Binomialmodells und bewertet die Steuerersparnisse im risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsraum. Die Autoren *Förster, Stöckl und Brenken* verwenden ebenfalls einen zweiperiodigen Binomialbaum, um die Pfadabhängigkeit der Steuerersparnisse zu demonstrieren. Sie schlagen vor Steuerersparnisse durch Zinsvorträge und Zinsaufwand zu trennen und separat zu bewerten.[5] *Arnold* und *Lahmann* (2010) leiten basierend auf einem optionstheoretischen Kalkül eine Bewertungsgleichung für die fremdfinanzierungsbedingten Steuervorteile bei Gültigkeit der Zinsschrankenregelung her. Für Verlustvorträge haben *Piehler* und *Schwetzler* (2010) die Pfadabhängigkeit der ausgelösten Steuerersparnisse als relevant für deren Bewertung belegt. Zur Lösung verwenden die Autoren optionstheoretische Modelle und eine Monte-Carlo-Simulation. *Streitferdt* (2010) verwendet für die Bewertung von Verlustvorträgen ebenfalls optionstheoretische Kalküle und Simulationsmodelle. Eine Erweiterung des Modells für die Einbeziehung der Zinsschranken-Regelung findet sich in *Streitferdt* und *Meitner* (2011).

Schließlich ist dieser Beitrag in die umfangreiche Literatur der Bewertung von fremdfinanzierungsbedingten Steuervorteilen in Abhängigkeit von der unterstellten Finanzierungspolitik des Unternehmens einzuordnen. Hier sind insbesondere die Beiträge von *Homburg*, *Stephan* und *Weiß* (2004), *Kruschwitz*, *Lodowicks* und *Löffler* (2005), *Rapp* (2006) und *Lodowicks* (2007) zu nennen, die sich mit der Einbeziehung von ausfallbedrohtem Fremdkapital und der damit verbundenen Möglichkeit der Unternehmensinsolvenz in die Bewertung des Tax Shield beschäftigen.

Ein vereinfachtes, ähnliches Modell wurde bereits in "Die Wirtschaftsprüfung"

[4] Vgl. *Eberl* (2009). *Bachmann* und *Schultze* (2008) gehen bei ihrer Analyse davon aus, dass die Zinsschranke in jeder Periode bindend ist.
[5] Vgl. *Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009). Kritisch hierzu *Arnold*, *Lahmann* und *Schwetzler* (2011b).

durch die Autoren vorgestellt.[6] In diesem Artikel wurden empirische Daten auf Basis deutscher Branchen ermittelt und der Einfluss von Insolvenz und Zinsschranke auf den Unternehmenswert untersucht. Der vorliegende Artikel diskutiert den Bewertungsansatz und die Annahmen intensiv und ergänzt um einen Ratingmechanismus basierend auf Ausfallwahrscheinlichkeiten des Fremdkapitals. Er erweitert die bisherige Literatur und den zuvor genannten Artikel um wichtige Aspekte:

1. Die Tax Shield-Formeln bei autonomer und wertorientierter Finanzierungspolitik werden in einem Simulationsmodell basierend auf EBITDA (Negativsteuer, keine Insolvenz) nachvollzogen.[7] Diese Anwendung von numerischen Methoden erlaubt Abweichungen von üblichen Annahmen der DCF-Verfahren und es können komplexe Pfadabhängigkeiten (Rating, Insolvenz und Zinsschranke) unter Betrachtung von langen Laufzeiten analysiert werden.

2. Zum ersten Mal wird der Werteffekt von Insolvenz und Zinsschranke in beiden Finanzierungspolitiken mit Hilfe von Simulationsmodellen demonstriert. Bislang wurde der Werteffekt der Zinsschranke lediglich für eine autonome Finanzierungspolitik und risikoloses Fremdkapital analysiert.[8] In den Tax Shield-Formeln wird die Bewertung durch Diskontierung der erwarteten Steuerersparnisse vorgeschlagen. Es ist allgemein bekannt, dass dieses Vorgehen nur bei Annahme einer Negativsteuer zu korrekten Werten führen kann. Die Abweichung zu den Ergebnissen der Tax Shield-Formeln vergrößert sich, wenn zusätzlich die Möglichkeit einer Insolvenz berücksichtigt wird. Der zusätzliche Effekt der Zinsschranke auf den Wert der Steuervorteile ist gegenüber dem Fall mit Insolvenzmöglichkeit zu vernachlässigen.

3. Fremdkapitalgeber machen den geforderten Kreditzinssatz regelmäßig vom übernommenen Ausfallrisiko abhängig. Dieses Risiko kann sich im Zeitablauf

[6] Vgl. *Arnold*, *Lahmann* und *Schwetzler* (2012).
[7] Vgl. *Modigliani* und *Miller* (1963) und *Myers* (1974) beziehungsweise *Miles* und *Ezzell* (1980).
[8] Vgl. *Streitferdt* (2010).

verändern. Gläubiger werden auf einen Anstieg des Kreditrisikos reagieren, indem sie zum Beispiel zusätzliche Sicherheiten fordern, das Kreditvolumen reduzieren und/oder einen höheren Kreditzinssatz fordern. In diesem Beitrag wird die Anpassung des Kreditzinssatzes bei einer Veränderung des Risikos mit Hilfe eines Ratingmechanismus modelliert. Das ist insbesondere bei einer unterstellten autonomen Finanzierungspolitik mit konstantem Fremdkapitalbestand realistisch.

Der Beitrag ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 6.2 werden grundlegende Annahmen und steuerliche Regelungen definiert. Die Betrachtung der fremdfinanzierungsbedingten Steuervorteile eines Jahres werden in Kapitel 6.3 mit Hilfe geschlossener Optionsbewertungsgleichungen für unterschiedliche Modellkonstellationen vorgenommen. Im Beitrag wird durchgängig ein mehrperiodiges DCF-Modell entwickelt, das in Kapitel 6.4 numerisch gelöst und analysiert wird. Anhand von Beispielen werden für beide Politiken der Einfluss von Rating, Insolvenz und Zinsschranke auf den Wert des Tax Shield diskutiert.

6.2 Annahmen und Notation

6.2.1 Grundlegende Annahmen

Es sollen die Wirkungen noch zu treffender Annahmen auf den Marktwert der Steuerersparnisse aus Fremdfinanzierung V_t^{TS} eines verschuldeten Unternehmens V_t^L analysiert werden. Das zum Zeitpunkt $t \geq 0$ zu bewertende verschuldete Unternehmen existiert bis $T = \infty$. Weiterhin werden Beobachtungszeitpunkte $t + i \in [0, T]$ und $t + i \in \mathbb{N}_0$, mit $i = 0, 1, 2, 3, ..., N$, definiert. Diese vorgegebenen Beobachtungszeitpunkte gehören zur Menge $\mathbb{T} = \{t, t+1, t+2, t+3, ..., t+N = T\}$ und sind derart spezifiziert, dass diese den Zeitpunkt der Berichterstattung[9] des betrachteten Unternehmens beschreiben.

[9]Dies sind jährliche Zeitpunkte an denen die GuV und die Bilanz des betrachteten Unternehmens veröffentlicht werden.

Kapitalkosten werden analog zu *Kruschwitz* und *Löffler* (2005) als bedingte erwartete Renditen definiert. Der risikolose Zinssatz r_f, die Eigenkapitalkosten eines unverschuldeten Unternehmens r_τ^u und der Unternehmenssteuersatz τ werden als deterministisch und konstant angenommen.[10] Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass der Kapitalmarkt arbitragefrei ist und somit wird auch von der Existenz eines zum realen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ äquivalenten, risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$ ausgegangen.[11] Weiterhin lassen sich alle Zahlungsströme der zu bewertenden Unternehmung (durch Wertpapiertransaktionen) auf dem Kapitalmarkt replizieren.

Das betrachtete Unternehmen erwirtschaftet im Zeitpunkt t einen steuerlichen Gewinn vor Steuern, Zinszahlungen und Abschreibungen in Höhe von EBITDA_t. Die künftigen Ausprägungen dieser Ergebnisgröße werden als unsicher angenommen. Das EBITDA folgt einer geometrisch Brownschen Bewegung gemäß

$$dEBITDA = \mu\ EBITDA\ dt + \sigma\ EBITDA\ dW, \tag{6.2.1}$$

wobei μ die Driftrate des Prozesses, σ die Volatilität der Veränderungsrate und dW den Wiener Prozess bezeichnen.[12]

Als nachgelagerte Ergebnisgröße kann der Gewinn vor Zinsen und Steuern (EBIT), als proportional zum EBITDA definiert werden und somit gilt

$$\mathrm{EBIT}_t = \alpha \cdot \mathrm{EBITDA}_t. \tag{6.2.2}$$

Der Faktor α, mit $\alpha \in (0,\ 1)$,[13] bildet den Effekt der Abschreibung ab.[14] Es

[10] In dem vorliegenden Beitrag wird aus Vereinfachungsgründen stetige Verzinsung verwendet.

[11] Zu den weiteren Voraussetzungen und Annahmen vgl. beispielsweise *Harrison* und *Kreps* (1979) oder auch *Kruschwitz* und *Löffler* (2006).

[12] Die Annahme der geometrisch Brownschen Bewegung findet sich regelmäßig in der Finanzierungsliteratur. Vgl. beispielsweise *Goldstein*, *Ju* und *Leland* (2001) oder *Hackbarth*, *Hennesy* und *Leland* (2007).

[13] Vgl. auch *Eberl* (2009), S. 269.

[14] Für die Unternehmen des Prime All Share betrug im Jahr 2009 α im Mittel 0,43.

ist zweckmäßig wie *Kruschwitz*, *Lodowicks* und *Löffler* (2005) davon auszugehen, dass sich die Abschreibungs- und Investitionspolitik eines unverschuldeten Unternehmens nicht von der eines verschuldeten Unternehmens unterscheidet und auch ein mögliches Insolvenzrisiko darauf keinen Einfluss hat.[15] Das EBITDA ist damit unabhängig von der Kapitalstruktur.

Der mit α abgebildete Zusammenhang zwischen EBITDA und EBIT ist im Weiteren von Bedeutung, da die Ergebnisgröße EBIT die Steuerbemessungsgrundlage vor Zinsaufwand darstellt. Im Gegensatz ist das EBITDA im Rahmen der Zinsschrankenregel von Bedeutung.

Die relevanten Steuerbemessungsgrundlagen folgen gemäß Gleichung (6.2.1) einem schwach autoregressivem Prozess mit geometrischer Drift und einem Fluktuationsterm.[16] Die dabei angenommenen Prozesseigenschaften weisen Vorzüge, aber auch Nachteile auf: So sind im zeitstetigen Fall Vorzeichenwechsel der Steuerbemessungsgrundlage nicht möglich. Bei zeitdiskreten Modellen können nur in Ausnahmesituationen negative Werte realisiert werden.[17] Eine Realisierung von negativen Steuerbemessungsgrundlagen führt, bei der hier unterstellten Erwartungsanpassung des Prozesses, zu negativen Beträgen der künftig erwarteten Steuerbemessungsgrundlagen - und damit zur Liquidation des Unternehmens. Zudem sichert diese Annahme eine (theoretisch einwandfreie) arbitragefreie Bewertung[18] und ermöglicht dem praktischen Anwender eine (einfache) empirische Erhebung beziehungsweise Bestimmung

---

[15] Vgl. für eine ähnliche Annahme *Kruschwitz*, *Lodowicks* und *Löffler* (2005), S. 223.

[16] Die Annahme zur Modellierung künftiger freier Cashflows durch einen schwach autoregressiven Prozess der Form $E\left[FCF_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] = (1 + g_t) \cdot (FCF_t)$ ist in *Kruschwitz* und *Löffler* (2005) oder *Kruschwitz* und *Löffler* (2006) zu finden. Eine kurze Übersicht zu verwendeten stochastischen Prozessen in der Unternehmensbewertung und deren Implikationen findet sich in *Arzac* und *Glosten* (2005), S. 455.

[17] Für diskrete Zeitpunkte ist Gleichung (6.2.1) in $\Delta\text{EBITDA} = \mu \text{ EBITDA } \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\ \epsilon$ zu übertragen, wobei ϵ normalverteilt ist mit $N(0,\ 1)$. Durch Multiplikation der Quadratwurzel des kleinen Zeitintervalls $\sqrt{\Delta t}$ mit der normalverteilten Zufallsvariable ϵ sind Vorzeichenwechsel möglich.

[18] Vgl. beispielsweise *Laitenberger* und *Löffler* (2006). Unter Verwendung dieser Annahme wird der Zusammenhang $\frac{E_Q[FCF_s|\mathcal{F}_t]}{(1+r_f)^{s-t}} = \frac{E[FCF_s|\mathcal{F}_t]}{(1+r)^{s-t}}$ bewiesen. Vgl. für eine Einführung *Kruschwitz* und *Löffler* (2006), S. 26 ff.

der Kapitalkosten sowie des Marktpreises des Risikos mit Hilfe des CAPM.[19]

6.2.2 Annahmen zur Fremdfinanzierung, Insolvenz und risikoangepassten Fremdkapitalzinssätzen

Autonome und Wertorientierte Verschuldungspolitik

Bei der Analyse von Steuerersparnissen aus Fremdfinanzierung ist davon auszugehen, dass das betrachtete verschuldete Unternehmen eine bestimmte Verschuldungspolitik verfolgt. Zu den in der Literatur verbreitetsten Finanzierungspolitiken im Rahmen des DCF-Ansatzes gehören die autonome (passive) und wertorientierte (aktive) Finanzierungspolitik. Unabhängig von der verfolgten Finanzierungspolitik ist das verschuldete Unternehmen insolvenzgefährdet und hat risikoangepasste Fremdkapitalkosten in Höhe von r_D[20] auf den Fremdkapitalbestand D_t zu entrichten. Das Fremdkapital beziehungsweise der Kredit wird im Zeitpunkt $t-1$ in Höhe von D_{t-1} aufgenommen und ist eine Periode später in vollem Umfang zu tilgen. Wird im Zeitpunkt t erneut ein Kredit in Höhe von D_t aufgenommen, so beträgt die Veränderung des Fremdkapitalbestandes des verschuldeten Unternehmens $\Delta D_{t-1,\ t} = D_t - D_{t-1}$.

Ein Unternehmen verfolgt eine autonome Finanzierungspolitik, wenn alle zukünftigen absoluten Fremdkapitalbestände $D_t,\ D_{t+1},\ ...,\ D_T$ deterministisch und unabhängig vom künftigen Wert einer verschuldeten Unternehmung V_t^L sind. Daraus folgt, dass zukünftige Fremdkapitalquoten $l_t = \frac{D_t}{V_t^L}$ ebenfalls Zufallsvariablen sind. In der Literatur wird folgende Bewertungsgleichung für das Tax Shield bei autonomer

[19] *Streitferdt* (2010) und *Streitferdt* und *Meitner* (2011) verwenden einen additiven Prozess für die Modellierung der Steuerbemessungsgrundlage. Dieser Prozess ermöglicht Vorzeichenwechsel der Bemessungsgrundlage, erschwert jedoch die Bestimmung der Kapitalkosten mit Hilfe des CAPM sowie die des Marktpreises des Risikos. Diese Größen sind dann zusätzlich vom zeit-/periodenspezifischen Assetpreis abhängig.

[20] In Abschnitt (6.2.2) wird diese Annahme auf im Zeitablauf veränderliche, risikoangepasste Fremdkapitalzinsen $r_{D,t}$ erweitert.

Finanzierung gemäß des APV-Verfahrens vorgeschlagen[21]

$$V_t^{TS,auton.} = \sum_{s=t+1}^{T} \frac{(e^{r_D} - 1) \cdot \tau \cdot D_{t-1}}{e^{r_D(s-t)}}. \tag{6.2.3}$$

Für den Rentenfall mit dauerhaft konstantem Fremdkapitalbestand $D_t = D_0$ vereinfacht sich die Bewertungsgleichung zu

$$V_t^{TS,auton.} = \frac{(e^{r_D} - 1) \cdot \tau \cdot D_0}{(e^{r_D} - 1)} = \tau \cdot D_0. \tag{6.2.4}$$

Die Verfechter von Gleichung (6.2.3) argumentieren, dass wegen der zustandsunabhängigen künftigen Fremdkapitalbestände lediglich das Kreditrisiko bei der Bewertung der Steuervorteile zu berücksichtigen sei. Dieses ist im geforderten Kreditzinssatz r_D reflektiert.[22] Bei Annahme von riskantem Fremdkapital verbirgt sich hinter dieser Formulierung ein zentrales Problem: der risikoangepasste Zins. Dieser wird nur ein einziges Mal, zu Beginn der Kreditbeziehung in $t = 0$, festgelegt und anschließend nicht mehr angepasst. Da sich im Zeitablauf durch den EBITDA-Prozess auch die Erwartungen und die Risikoeigenschaften der künftigen Überschüsse verändern, erscheint die Annahme eines unveränderten Kreditzinssatzes nicht sehr realistisch. Aus diesem Grund wird in diesem Beitrag angenommen, dass die Gläubiger den geforderten Kreditzinssatz r_D anpassen können. Diese Anpassung geschieht einmal pro Jahr und wird in Abschnitt 6.2.2 motiviert.

Im Vergleich zur autonomen Finanzierung werden bei wertorientierter Finanzierungspolitik die Ausprägungen der künftigen Fremdkapitalquoten $l_t,\ l_{t+1},\ ...,\ l_T$ von den Unternehmenseignern festgelegt. Dies führt in Verbindung mit unsicheren künftigen Unternehmenswerten V_t^L wegen $l_t = \frac{D_t}{V_t^L}$ zu unsicheren künftigen Fremdkapitalbeständen D_t. Das dadurch induzierte zusätzliche Risiko des Fremdkapital-

[21] Die Wahl des Diskontierungsfaktors des Tax Shield wird spätestens seit *Myers* (1974) diskutiert. *Myers* (1974) propagierte, dass der Wert des Tax Shield durch Diskontierung der Steuervorteile aus Fremdfinanzierung mit den Fremdkapitalkosten zu berechnen ist.

[22] Vgl. beispielsweise *Myers* (1974) oder auch *Massari*, *Roncaglio* und *Zanetti* (2007).

niveaus führt zu folgender Bewertungsgleichung für das Tax Shield:[23]

$$V_t^{TS,wert.} = \sum_{s=t+1}^{T} \frac{E\left[D_{s-1}\right] \cdot \left(e^{r_D} - 1\right) \cdot \tau}{e^{\left(r_D + r_\tau^u (s-t-1)\right)}}. \tag{6.2.5}$$

Die Anpassung des Kreditvolumens geschieht einmal pro Jahr auf Basis des am Jahresende realisierten EBITDA_t beziehungsweise V_t^L.[24]

Im Rentenmodell mit dauerhaft konstantem Verschuldungsgrad und konstantem erwarteten Fremdkapitalbestand D_0 kann die folgende Bewertungsgleichung hergeleitet werden:

$$V_t^{TS,wert.} = \tau \cdot D_0 \cdot \frac{\left(e^{r_D} - 1\right) \cdot e^{r_\tau^u}}{\left(e^{r_\tau^u} - 1\right) \cdot e^{r_D}}. \tag{6.2.6}$$

Die getroffene Annahme bezüglich der Finanzierungspolitik hat bereits ohne Berücksichtigung von Zinsschranke und Insolvenzrisiko erheblichen Einfluss auf den Wert der Steuervorteile und auf den Wert des Unternehmens.[25] In der Literatur zur Analyse von Steuereffekten der Fremdfinanzierung finden sich unterschiedliche Annahmen bezüglich der Finanzierungspolitik: *Homburg*, *Stephan* und *Weiß* (2004) lehnen die autonome Finanzierungspolitik mit Verweis auf die fehlende Anpassung der Kreditbedingungen an gegebenenfalls auftretende Änderungen des Kreditrisikos ab und analysieren lediglich die Wirkung einer wertorientierten Politik. *Rapp* (2006) unterstellt ebenfalls eine wertorientierte Politik, orientiert sich allerdings nicht am Markt- sondern am Buchwert des Fremdkapitals. *Förster*, *Stöckl* und *Brenken* (2009) und *Streitferdt* (2010) gehen von einer autonomen Finanzierungspolitik aus. *Mai* (2008) analysiert mit Hilfe eines zweiperiodigen Binomialbaums für beide Politiken mit risikolosem Fremdkapital die Wirkung der Zinsschranke. *Kruschwitz*, *Lodowicks* und *Löffler* (2005) und *Lodowicks* (2007) lassen unterschiedliche Finanzierungspo-

[23] Vgl. beispielsweise *Arzac* und *Glosten* (2005), S. 455 ff.

[24] Gemäß *Fischer*, *Heinkel* und *Zechner* (1989) wäre eine laufende Anpassung des Fremdkapitalbestandes wegen der dabei anfallenden Transaktionskosten keine realistische Annahme.

[25] Im Zeitpunkt der Bewertung besteht keinerlei Möglichkeit die Validität der vom Unternehmensbewerter getroffenen Annahme zu verifizieren. Vgl. hierzu *Schwetzler* (2000).

litiken zu.[26] In der vorliegenden Untersuchung sollen beide der genannten Finanzierungspolitiken hinsichtlich ihres Einflusses auf den Wert des Tax Shield analysiert werden.

Ausfallrisiko und Insolvenz

Nach der Trade-Off-Theorie der optimalen Kapitalstruktur sind dem Steuervorteil der Fremdfinanzierung entsprechende Nachteile gegenüber zu stellen. Von großer Bedeutung sind Effekte einer möglichen Insolvenz: Mit zunehmendem Fremdkapitalbestand steigt die Wahrscheinlichkeit, dass das Unternehmen nicht in der Lage ist, Zins- und Tilgungszahlungen vertragsgemäß zu leisten. Bei der Analyse fremdfinanzierungsbedingter Steuervorteile spielt deshalb die Modellierung der Insolvenz und deren Konsequenzen eine wichtige Rolle. Eine Insolvenz ist grundsätzlich gegeben, falls bilanzielle Überschuldung oder Zahlungsunfähigkeit vorliegen. In der vorliegenden Arbeit wird als Insolvenzauslöser die Zahlungsunfähigkeit nach § 17 InsO verwendet. Bei Insolvenzeintritt ist das Unternehmen nicht mehr in der Lage, aus dem realisierten freien Cashflow die Zahlungen an seine Gläubiger termingerecht zu leisten.[27] Formal lautet die daraus abzuleitende Insolvenzbedingung

$$FCF_t^L < e^{r_D} \cdot D_{t-1} - D_t \tag{6.2.7}$$

beziehungsweise

$$\text{EBITDA}_t - INV_t < e^{r_D} \cdot D_{t-1} - D_t, \tag{6.2.8}$$

[26] Die risikoneutrale Formulierung der Bewertungsgleichung für die Steuervorteile lässt die Frage offen, ob die Adjustierung den Fremdkapitalbestand und/oder die damit verbundenen Zinssätze betrifft. Vgl. *Kruschwitz*, *Lodowicks* und *Löffler* (2005) oder auch *Lodowicks* (2007).

[27] Insolvenzauslösende sind somit die Gläubiger des Unternehmens. Die Frage, ob Insolvenz auch bei Eigenfinanzierung zum Beispiel durch den Fiskus ausgelöst werden kann, wird in der Literatur kaum thematisiert.

wobei FCF_t^L die freien Cashflows eines verschuldeten Unternehmens und INV_t den Betrag für die Brutto-Investitionen des Unternehmens bezeichnen. Die Brutto-Investitionen werden annahmegemäß zeitlich vor den Zahlungen an die Gläubiger getätigt.[28]

Im Weiteren wird der sogenannte Rentenfall mit konstanten erwarteten freien Cashflows modelliert. Es ist dann plausibel, von einem gleichbleibenden Vermögensbestand des zu bewertenden Unternehmens auszugehen und Abschreibungen in gleicher Höhe der Investitionsauszahlungen anzunehmen. In diesem Fall gilt $\text{EBIT}_t = FCF_t^L$ und damit für den Insolvenzauslöser

$$\text{EBIT}_t < e^{r_D} \cdot D_{t-1} - D_t. \tag{6.2.9}$$

Bezüglich der in Gleichung (6.2.9) mit $D_t - D_{t-1}$ enthaltenen Veränderung des Fremdkapitalbestandes ist nun zwischen autonomer und wertorientierter Finanzierungspolitik zu differenzieren:

- Bei autonomer Finanzierungspolitik gilt im Rentenmodell $D_t = D_0 \forall t$. Die Insolvenzbedingung lautet dann $\text{EBIT}_t < (e^{r_D} - 1) \cdot D_0$.

- Im Fall der wertorientierten Finanzierungspolitik kommt es auch im Rentenmodell bei konstanter Fremdkapitalquote $l_t = l_0 \forall t$ zu möglichen Tilgungszahlungen $D_{t-1} - D_t > 0$, falls ein Rückgang des Unternehmenswertes eine Rückzahlung von Krediten erfordert. Der Insolvenzauslöser lautet hier weiterhin $\text{EBIT}_t < e^{r_D} \cdot D_{t-1} - D_t$.

Die entsprechende Insolvenzbedingung wird am Ende jeder Periode anhand der zu jenen Zeitpunkten realisierten Größen geprüft.

Die möglichen Konsequenzen einer Insolvenz auf den Wert des Tax Shield erfordern eine Reihe weiterer Annahmen:

[28] Eine Kürzung des Investitionsvolumens zur Vermeidung der Insolvenz wäre mit der Annahme unvereinbar, dass eigen- und fremdfinanzierte Unternehmen identische Investitionsprogramme (beziehungsweise EBITDA-Prozesse) aufweisen sollen.

1. Alle Marktteilnehmer und damit auch die Kapitalgeber sind sich über die zukünftige Verteilung des EBITDA einig. Dies bedeutet, dass Gläubiger und Eigenkapitalgeber homogene Erwartungen besitzen und somit über den gleichen Informationsstand verfügen.[29]

2. Es werden Unternehmen mit der Rechtsform einer Kapitalgesellschaft betrachtet. Somit ist Privathaftung ausgeschlossen und für die Befriedigung der Gläubigeransprüche stehen nur die freien Cashflows zur Verfügung.

3. Im Jahr des Eintritts der Insolvenz erzielt das Unternehmen eine fremdfinanzierungsbedingte Steuerersparnis in Höhe von $\tau \cdot \min\left((e^{r_D} - 1) \cdot D_{t-1};\ \mathrm{EBIT}_t\right)$. Es wird angenommen, dass die Gläubigeransprüche gegenüber denen des Fiskus priorisiert werden. Deshalb wird die Steuerersparnis in vollem Umfang den Gläubigern gutgeschrieben.[30]

4. Die Vergleichbarkeit mit einem eigenfinanzierten Unternehmen macht die Annahme notwendig, dass das fremdfinanzierte Unternehmen nach Insolvenzeintritt eigenfinanziert fortgeführt wird.[31] Somit fallen in den Jahren nach Eintritt der Insolvenz keine weiteren Steuervorteile durch Fremdfinanzierung mehr an.[32]

[29] Für eine Diskussion dieser Annahme vgl. beispielsweise *Kruschwitz*, *Lodowicks* und *Löffler* (2005), S. 225.

[30] Im Fall der autonomen Finanzierungspolitik sind Zahlungsunfähigkeit und positive Steuerbemessungsgrundlage nicht gleichzeitig möglich. Bei wertorientierter Finanzierungspolitik kann dieser Fall hingegen eintreten. Trotzdem hat die mögliche Steuerersparnis auf die Zinsaufwendungen keinen Einfluss auf die Auslösung der Insolvenz durch die Gläubiger. Diese müssen die Insolvenz auslösen, um über die Priorisierung ihrer Ansprüche in der Insolvenz gegenüber dem Fiskus die Steuerersparnis zugeschrieben zu bekommen.

[31] Für die Annahme zum Zweck der Vergleichbarkeit vgl. zum Beispiel *Rapp* (2006), S. 779 oder auch *Lodowicks* (2007), S. 35.

[32] Vgl. auch *Lodowicks* (2007), S. 28 ff., der diese Annahme mit der Unmöglichkeit der Modellierung von neuen Finanzierungsverhandlungen zwischen Eigentümern und Gläubigern nach Insolvenzeintritt begründet. *Rapp* (2006) und *Streitferdt* (2010) gehen hingegen davon aus, dass die Steuervorteile aus der Fremdfinanzierung auch nach Eintritt der Insolvenz realisiert werden können.

Risikoangepasste Kreditzinssätze

Kreditgeber prüfen nicht nur regelmäßig, ob das dementsprechende Insolvenzkriterium eingetreten ist, sondern beobachten auch laufend, wie sich die Ausfallwahrscheinlichkeit und damit das Kreditrisiko im Zeitablauf ändern. In vorliegender Arbeit wird deshalb davon ausgegangen, dass die Fremdkapitalgeber bei Veränderungen des Kreditrisikos eine Anpassung des Fremdkapitalzinssatzes r_D an die geänderte Risikosituation durchsetzen. Im Falle einer Verringerung des Risikos werden die Unternehmenseigentümer eine Nachverhandlung und Anpassung durchsetzen. Hierzu ist nicht unbedingt die Modellierung von neuen Verhandlungen zwischen Eigentümern und Gläubigern erforderlich. Es wird angenommen, dass sich die Parteien in $t = 0$ auf eine automatische Anpassung des Kreditzinssatzes in Abhängigkeit des Unternehmens-Ratings über einen sogenannten Rating-Trigger einigen.[33] Dies impliziert, dass das Rating indirekt über die Kreditzinsen einen Einfluss auf den Wert der Steuerersparnisse hat.

In diesem Beitrag wird die Anpassung des Fremdkapitalzinssatzes mit Hilfe einer Rating Tabelle modelliert, die sich an denen der Rating-Agenturen Standard & Poors (S&P), Fitch und Moody's orientiert. Leider geben diese nicht bekannt, welche Daten und Methoden zur Bestimmung eines Unternehmensratings verwendet werden.[34] Es kann allerdings davon ausgegangen werden, dass Kennzahlen aus Bilanz und GuV des Vorjahres für eine Bestimmung des Ratings herangezogen werden.[35]

Auf Basis der in Abschnitt 6.2.2 aufgestellten Insolvenzkriterien werden am jeweiligen Periodenende die Ausfallwahrscheinlichkeiten P^D berechnet. Die Verteilung des EBIT_t kann durch das in $t-1$ realisierte EBIT_{t-1}, σ und α bestimmt werden. Für

[33] Zu Rating-Triggers vgl. allgemein *Bhanot* und *Mello* (2006).
[34] Dies wird nicht erst seit der Finanzkrise von 2008 in den Medien und der Politik bemängelt. Vgl. beispielsweise *United States Securities and Exchange Commission* (2003).
[35] Vgl. *Kaplan* und *Urwitz* (1979) oder auch *Ayers*, *LaPlante* und *McGuire* (2010).

die autonome Verschuldungspolitik ist die Ausfallwahrscheinlichkeit durch

$$P^D\left(\mathrm{EBIT}_t < (e^{r_{D,t-1}} - 1) \cdot D_{t-1}\right) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{(e^{r_{D,t-1}}-1)D_{t-1}}{\mathrm{EBIT}_{t-1}}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}\right) \tag{6.2.10}$$

und für wertorientierte Verschuldungspolitik durch

$$P^D\left((1+\Gamma_t)\mathrm{EBIT}_t < e^{r_{D,t-1}} \cdot D_{t-1}\right) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{e^{r_{D,t-1}} \cdot D_{t-1}}{(1+\Gamma_{t-1})\mathrm{EBIT}_{t-1}}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}\right) \tag{6.2.11}$$

$$\text{mit} \quad \Gamma_{t-1} = \frac{l(1-\tau)\sum_{k=t}^{T} e^{(-r_\tau^u+\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(k-(t-1))}}{1 - l \cdot \tau \cdot \frac{r_{D,t-1}\cdot(1+r_\tau^u)}{r_\tau^u\cdot(1+r_{D,t-1})}},$$

gegeben.[36]

Unter Verwendung der berechneten Ausfallwahrscheinlichkeiten wird dann anhand einer Rating-Tabelle[37] der Kreditrisikoaufschlag RP auf den konstanten risikolosen Zinssatz r_f zur Bestimmung des geforderten Fremdkapitalsatzes $r_{D,t}$ für die Folgeperiode ermittelt. Für die Bestimmung von $r_{D,t} = r_f + RP$ wird im weiteren Tabelle 6.1 zu Grunde gelegt.

An dieser Stelle ist es wichtig, dass zukünftige Fremdkapitalkosten nicht im Bewertungszeitpunkt bekannt sein müssen. Es handelt sich um bedingte, erwartete Renditen für die jeweilige Periode. Sie können zur Lösung des Bewertungsproblems genutzt werden, da Gläubiger und Eigenkapitalgeber homogene Erwartungen besitzen und sich über den Rating-Trigger einig sind.

[36] Eine Herleitung für (6.2.10) und (6.2.11) findet sich im Anhang.

[37] Die Ratingagenturen S&P, Moody's und Fitch veröffentlichen regelmäßig Tabellen, in denen einer bestimmten Ausfallwahrscheinlichkeit der geschätzte Zinsaufschlag gegenübergestellt wird. Die Tabelle 6.1 ist in Anlehnung an diese Veröffentlichungen erstellt worden.

Tabelle 6.1: Zuordnung der Kreditrisikoaufschläge zu Ausfallwahrscheinlichkeiten.

Rating	Ausfallwahrscheinlichkeit $P^D(*)$	Kreditrisikoaufschlag RP
AAA	$0,18\%$	$1,0\%$
AA+ bis AA-	$0,42\%$	$1,5\%$
A+ bis A-	$0,62\%$	$2,0\%$
BBB+ bis BBB-	$1,89\%$	$3,0\%$
BB+ bis BB-	$9,27\%$	$4,0\%$
B+ bis B-	$28,24\%$	$6,0\%$
CCC bis C	$43,42\%$	$8,0\%$

6.2.3 Steuerliche Annahmen und Regelungen

Bevor einige Voraussetzungen zur Modellierung der Zinsschranke erläutert werden, bietet es sich an dieser Stelle an einige Annahmen bezüglich der steuerlichen Regelungen zu treffen:

- Es werden lediglich Steuern auf Unternehmensebene betrachtet.
- Bei negativer steuerlicher Bemessungsgrundlage existiert in diesem Modell kein sofortiger steuerlicher Verlustausgleich. Der sofortige steuerliche Verlustausgleich ist eine Standardannahme in der einschlägigen Literatur zu fremdfinanzierungsbedingten Steuervorteilen in der Unternehmensbewertung.[38]
- Es werden keine Verlustvorträge berücksichtigt.[39]
- Bei beschränkter Haftung ist die Priorisierung der Zahlungsansprüche bei Zahlungsausfällen von Bedeutung. Erstens wird angenommen, dass bei teilweisem Ausfall der Zahlungen die Gläubiger von ihrem Wahlrecht nach § 367 BGB in der Weise Gebrauch machen, dass sie zuerst Zinsen und anschließend Tilgung

[38] Vgl. beispielsweise *Rapp* (2006), S. 776 oder auch *Lodowicks* (2007), S. 27. *Kruschwitz*, *Lodowicks* und *Löffler* (2005), S. 231, setzen eine Minimumbedingung für die steuerliche Bemessungsgrundlage, die entsprechende Steuerersparnisse sicherstellt.

[39] Ein "normaler" Verlustvortrag ist in dem hier betrachteten Modell nicht möglich. Aufgrund des angenommenen EBITDA-Prozesses kann eine negative Steuerbemessungsgrundlage nur bei Insolvenz des Unternehmens auftreten.

verrechnen. Zweitens wird bei gleichzeitigen Zahlungsansprüchen des Fiskus und der Gläubiger davon ausgegangen, dass die Gläubiger priorisiert werden.[40]

- Bei beschränkter Haftung und teilweisem Ausfall der Gläubiger erzielen die Eigentümer des Unternehmens einen finanziellen Vorteil als sogenannten Sanierungsgewinn. Es wird angenommen, dass dieser Sanierungsgewinn nicht besteuert wird.[41]

Die Regelungen des § 4h Abs. 1 EStG gestatten einen Abzug der Nettozinsaufwendungen bis zu einer Höhe von maximal 30% des (steuerrechtlichen) Ergebnisses vor Zinsen, Steuern und Abschreibungen (EBITDA). Übersteigen die Nettozinsaufwendungen 30% des EBITDA gemäß $(e^{r_D} - 1) \cdot D_{t-1} > 0,3 \cdot \text{EBITDA}_t$, kommt es zum Greifen der Zinsschranke. Der überschießende Betrag $(e^{r_D} - 1) \cdot D_{t-1} - 0,3 \cdot \text{EBITDA}_t$ wird als Zinsvortrag ZV_t in das zukünftige Jahr übertragen. Unterschreiten in den folgenden Wirtschaftsjahren die Nettozinsaufwendungen 30% des EBITDA, kann der vorhandene Zinsvortrag in Höhe der Differenz zwischen EBITDA und Nettozinsaufwendungen steuerrechtlich geltend gemacht werden. Die Ausnahmetatbestände gemäß §4h Abs. 2 EStG[42], bei deren Vorliegen die Zinsschrankenregelung keine Anwendung findet, sollen bei dieser Betrachtung vernachlässigt werden.

Entsprechend der in der Praxis geäußerten Befürchtungen soll der maximale "Schaden" als Wertverlust der Steuerersparnis durch die Zinsschranke quantifiziert werden. Durch den mit dem Wachstumsbeschleunigungsgesetz im Jahr 2009 eingeführten EBITDA-Vortrag würde dieser Nachteil verringert. Deshalb wird auf eine Modellierung des EBITDA-Vortrages verzichtet.[43]

[40] Vergleichbare Annahmen finden sich bei *Rapp* (2006) und *Lodowicks* (2007). *Homburg*, *Stephan* und *Weiß* (2004), S. 280, hingegen nehmen gleichberechtigte Ansprüche von Gläubigern und Fiskus an.

[41] Mit Verweis auf ein BMBF Schreiben v. 27.3.2003, *Homburg*, *Stephan* und *Weiß* (2004), S. 280 ff., *Rapp* (2006), S. 776, *Lodowicks* (2007), S. 35. *Kruschwitz*, *Lodowicks* und *Löffler* (2005), S. 228, gehen hingegen von einem steuerpflichtigen Sanierungsgewinn aus.

[42] Zu den Ausnahmetatbeständen gehören die Freigrenze, die Konzernklausel und die Eigenkapitalklausel. Eine Übersicht findet sich in *Mai* (2008) und *Arnold* und *Lahmann* (2010).

[43] Vgl. für eine formale Analyse des EBITDA-Vortrages *Arnold*, *Lahmann* und *Schwetzler* (2011a).

6.3 Die Bewertung der Nächstjahres-Steuerersparnis - Herleitung der Bewertungsgleichungen

In diesem Kapitel werden die Gleichungen zur Bewertung der Steuerersparnisse der nächsten Periode bis $t+1$ aus Sicht eines beliebigen Zeitpunktes t abgeleitet. Sofern in diesem Zeitpunkt die maßgeblichen Parameter bekannt sind, ist es möglich den Wert der Steuerersparnisse durch geschlossene Formeln zu bewerten. Die Berechnung der Nächstjahres-Steuerersparnis (der Periode $t+1$) wird im Weiteren als "periodengerechte Wertermittlung" bezeichnet.

Im Folgenden werden drei Fälle näher betrachtet:

1. Bewertung des Tax Shield ohne Berücksichtigung der Zinsschranke, ohne Einbezug der Insolvenz;

2. Bewertung des Tax Shield ohne Berücksichtigung der Zinsschranke, mit Einbezug der Insolvenz;

3. Bewertung des Tax Shield mit Berücksichtigung der Zinsschranke und mit Einbezug der Insolvenz.[44]

Es handelt sich in diesem Kapitel ausschließlich um Bewertungsprobleme bei denen in t alle Parameter bekannt sind: Fremdkapital und -kosten, EBITDA_t, α und bei denen die Steuerersparnisse in $t+1$ vom stochastischen EBITDA_{t+1} abhängen. Im darauffolgenden Kapitel werden diese periodengerechten Formeln auch für spätere Zeitpunkte angewendet.[45]

[44] Eine Betrachtung des Szenarios "Tax Shield bei Berücksichtigung der Zinsschranke ohne Einbezug der Insolvenz" ist nicht sinnvoll, da der Einfluss der Zinsschranke trivialer Weise steigt, sofern das Fremdkapital immer größer wird.

[45] Durch die Möglichkeit einer Insolvenz, Anpassung der Fremdkapitalzinsen und Berücksichtigung der Zinsschranke entstehen dann Pfadabhängigkeiten die geschlossene Lösungen unmöglich machen. Daher werden bei der Betrachtung mehrere Perioden numerische Lösungsmethoden Anwendung finden.

6.3.1 Bewertung der Nächstjahres-Steuerersparnis ohne Zinsschranke und ohne Insolvenz

Herleitung der Bewertungsgleichung

Durch die getroffenen Annahmen lassen sich die fremdfinanzierungsbedingten Steuerersparnisse in $t+1$, wie folgt ermitteln:

$$TS_{t+1} = \tau \max\left(0; \min\left(\underbrace{\alpha \cdot \mathrm{EBITDA}_{t+1}}_{\mathrm{EBIT}_{t+1}}; (e^{r_D} - 1)D_t\right)\right). \tag{6.3.1}$$

Gleichung (6.3.1) entspricht den im Modell gesetzten steuerlichen Annahmen ohne Berücksichtigung der Zinsschranke und Insolvenz: Für den Fall der nicht vollständigen Anrechnung von Zinsaufwendungen gemäß $\alpha \cdot \mathrm{EBITDA}_{t+1} < (e^{r_D} - 1)D_t$ entspricht die Steuerersparnis dem Produkt aus Steuersatz τ und EBIT_{t+1}. Dies bedeutet, dass überschießende Zinsaufwendungen $(e^{r_D} - 1)D_t - \alpha \cdot \mathrm{EBITDA}_{t+1}$ nicht steuermindernd genutzt werden können. Für den Fall $\alpha \cdot \mathrm{EBITDA}_{t+1} \geq (e^{r_D} - 1)D_t$ führt der gesamte Zinsaufwand zu entsprechenden Steuerersparnissen.

Aufgrund der getroffenen Annahmen und der stochastischen Eigenschaften des EBITDA lässt sich Gleichung (6.3.1) als ein Portfolio, bestehend aus einer Long Position des EBITDA und einem Short Call mit einem Strike X von $\frac{1}{\alpha}(e^{r_D} - 1)D_t$, interpretieren:[46]

$$TS_{t+1} = \tau\alpha\left(\mathrm{EBITDA}_{t+1} - \max\left(0; \mathrm{EBITDA}_{t+1} - \frac{1}{\alpha}(e^{r_D} - 1)D_t\right)\right). \tag{6.3.2}$$

Auch ökonomisch macht hier die vorgenommene Interpretation Sinn: Der Fiskus hält einen Call, nach dessen Ausübung seine Steuereinnahmen nicht mehr durch Fremdkapitalzinsen verringert werden. Der Barwert im Zeitpunkt t des in $t+1$ realisierten Zahlungsstroms gemäß Gleichung (6.3.2) entspricht dem Erwartungswert

[46] In der Literatur findet sich in diesem Zusammenhang auch die Bezeichnung Capped Call, wobei der Short Call als Cap fungiert. Vgl. zur analogen Bewertung von Verlustvorträgen *Piehler* und *Schwetzler* (2010) und *Streitferdt* (2010).

unter $\mathbb{Q}$ diskontiert mit dem risikolosen Zinssatz r_f:

$$PV_t\left(TS_{t+1}\right) = e^{-r_f}\tau\alpha\left(E_{\mathbb{Q}}\left[\text{EBITDA}_{t+1}\right] - E_{\mathbb{Q}}\left[\max\left(0; \text{EBITDA}_{t+1} - \frac{1}{\alpha}(e^{r_D}-1)D_t\right)\right]\right), \tag{6.3.3}$$

beziehungsweise mit $C = e^{-r_f}E_{\mathbb{Q}}\left[\max\left(0; \text{EBITDA}_{t+1} - \frac{1}{\alpha}(e^{r_D}-1)D_t\right)\right]$

$$PV_t\left(TS_{t+1}\right) = \tau\alpha\left(e^{-r_f}E_{\mathbb{Q}}\left[\text{EBITDA}_{t+1}\right] - C\right). \tag{6.3.4}$$

Dabei bezeichnen $PV_t(.)$ den Barwert zum Zeitpunkt t, C den Barwert eines Calls und $E_{\mathbb{Q}}$ den Erwartungswert unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$. Um eine risikoneutrale Bewertung zu vollziehen, ist der stochastische Prozess des EBITDA anzupassen. Dafür ist es erforderlich, das bisher verwendete tatsächliche Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ in ein dazu äquivalentes, risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ zu überführen, unter dem EBITDA ein Martingal wird.[47] Es ergibt sich die folgende analytische Bewertung für die periodengerechten fremdfinanzierungsbedingten Steuervorteile:[48]

$$PV_t\left(TS_{t+1}\right) = \tau\alpha\left(\text{EBITDA}_t - \left(\text{EBITDA}_t \cdot N(d_1) + \frac{1}{\alpha}(e^{r_D}-1)D_t e^{-r_f}\cdot N(d_2)\right)\right), \tag{6.3.5}$$

wobei $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{\text{EBITDA}_t}{\frac{1}{\alpha}(e^{r_D}-1)D_t}\right)+\left(r_f+\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}$ und $d_2 = d_1 - \sigma$.

Die Formel ist lösbar, falls D_t und EBITDA_t bekannt sind.

Ein Zahlenbeispiel

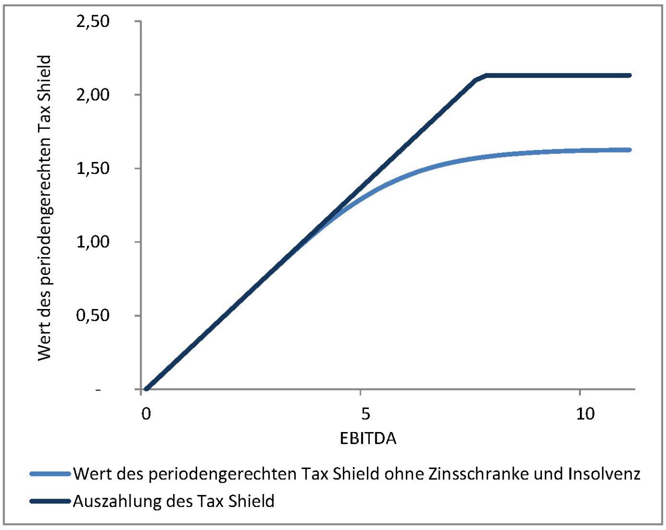
Ein Zahlenbeispiel soll die Bewertung der Steuerersparnis anhand der hergeleiteten Gleichungen (6.3.2) und (6.3.5) erläutern. Die Parametern $r_D = r_f = 3\%$, $D_t = 200$, $\alpha = 0,8$,

[47] Dazu muss die folgende Substitution in Gleichung (6.2.1) vorgenommen werden: $dW = -\frac{\mu - r_f}{\sigma}dt + dW^*$, wobei dW^* eine Brownsche Bewegung unter $\mathbb{Q}$ darstellt. Vgl. beispielsweise *Shreve* (2004), S. 214 ff.

[48] Die Herleitung des Ausdruckes C kann Anhang D.2.1 entnommen werden.

$\sigma = 30\%$ und $\tau = 35\%$ sind bekannt. Die folgende Abbildung 6.1 stellt die unter diesen Bedingungen resultierende Zahlungsstruktur (Payoff in T) sowie den Barwert in t der erzielbaren Steuerersparnisse in Abhängigkeit vom EBITDA dar.

Abbildung 6.1: Theoretischer Wert des Tax Shield.



Zum Optionscharakter des Steuerersparnisse in Abbildung 6.1:

- Ist das EBITDA$_{t+1}$ kleiner gleich dem Zinsaufwand geteilt durch α, $\frac{1}{\alpha}(e^{r_D} - 1)D_t$, führt jede Erhöhung des realisierten EBITDA$_{t+1}$ um eine Einheit zu einem Anstieg des Tax Shield um $\alpha \cdot \tau$.

- Übersteigt das EBITDA$_{t+1}$ die Höhe des Zinsaufwandes geteilt durch α in unserem Beispiel $\frac{1}{0{,}8}(e^{0{,}03} - 1)200 = 7{,}61$, wird die maximale Steuerersparnis in Höhe von $\tau(e^{r_D} - 1)D_t = 0{,}35(e^{0{,}03} - 1)200 = 2{,}13$ realisiert. Darüber hinaus sind keine weiteren Steuerersparnisse mehr möglich.

Mit Hilfe der Bewertungsgleichung (6.3.5) lassen sich durch eine Ceteris-Paribus-Analyse optionspreistheoretische Erkenntnisse zu den Einflussfaktoren auf den Barwert von $PV_t\,(TS_{t+1})$ aufzeigen:

- Die Höhe des EBITDA$_t$ hat positiven Einfluss auf den Wert der Steuerersparnis in $t + 1$. Sie determiniert gemeinsam mit den Parametern des stochastischen Prozesses die Verteilung der künftigen Steuerbemessungsgrundlage. Wie in Abbildung 6.1

zu erkennen ist, ist der Barwert der periodengerechten Steuerersparnisse vom Ausgangswert EBITDA_t abhängig. Ein höheres EBITDA_t hat immer positiven Einfluss auf die Steuerersparnisse. Allerdings wird bei gegebenem Zinsaufwand der Wertzuwachs immer kleiner, da die maximale Steuerersparnis irgendwann mit Sicherheit eintritt.

- Die Höhe von D_t steigert den Barwert der Steuerersparnis. Ein Anstieg des Fremdkapitals erhöht den Strike des Portfolios. Höhere Fremdkapitalbestände führen zu höheren Zinsaufwendungen, die auch bei unsicheren und unveränderten künftigen Steuerbemessungsgrundlagen zu höheren Steuerersparnissen führen.

- Die Volatilität hat ceteris paribus einen negativen Einfluss auf $PV_t\,(TS_{t+1})$: Eine zunehmende Streuung der Zufallsvariable EBITDA_{t+1} führt zu einer erhöhten Wahrscheinlichkeit, dass wegen $\alpha\mathrm{EBITDA}_{t+1} < (e^{r_D} - 1)D_t$ Teile des Zinsaufwandes nicht in entsprechende Steuerersparnisse umgesetzt werden können und verloren gehen.

- α repräsentiert den nicht durch Abschreibungsgegenwerte abgedeckten Teil des EBITDA, der entsprechende Steuerersparnisse durch Zinsaufwand ermöglichen kann. Eine Erhöhung von α erhöht ceteris paribus das Tax Shield.

- Zusätzlich treten indirekte Effekte bei einer gegebenenfalls eintretenden Veränderung des Kreditrisikos auf. Eine Erhöhung des Kreditrisikos durch eine exogene Erhöhung von σ oder D_t beziehungsweise eine Verringerung von EBITDA_t, führt über den entsprechenden Anstieg von r_D zu einer Erhöhung von $PV_t\,(TS_{t+1})$ und vice versa.[49]

[49] Die Anpassung des Fremdkapitalzinssatzes wird detaillierter im nächsten Abschnitt diskutiert. *Homburg, Stephan* und *Weiß* (2004) gelangen zum gleichen Ergebnis bezüglich des Effektes von risikobehaftetem Fremdkapital: ein Anstieg des geforderten Fremdkapitalzinssatzes führt ceteris paribus zu einem höheren Tax Shield. Dort wird der geforderte Zinssatz exogen vorgegeben.

6.3.2 Bewertung der Nächstjahres-Steuerersparnis ohne Zinsschranke, mit Insolvenz

Herleitung der Bewertungsgleichung

Im Weiteren wird die Möglichkeit des Insolvenzeintritts und damit verbunden eine Anpassung von r_D an gegebenenfalls geänderte Insolvenzwahrscheinlichkeiten modelliert werden. Der Einbezug einer möglichen Insolvenz setzt die Berücksichtigung eines möglichen Insolvenzeintritts in allen Perioden $s < t$ voraus. Es wird davon ausgegangen dass die Insolvenz bis zur Periode t noch nicht eingetreten ist.[50] Bei Berücksichtigung der Anpassung von r_D in t ist es notwendig, $t-1$ in die Betrachtung einzubeziehen. Das Insolvenzkriterium ist allgemein durch $\mathrm{EBIT}_{t+1} < e^{r_D} D_t - D_{t+1}$ definiert. Zum Zeitpunkt $t+1$ vergleichen die Kreditgeber EBIT_{t+1} und $e^{r_D} D_t - D_{t+1}$. Ist das EBIT größer als die zu erbringenden Kreditleistungen liegt keine Insolvenz vor. Bei $\mathrm{EBIT}_{t+1} < e^{r_D} D_t - D_{t+1}$ ist das Unternehmen insolvent. Steuervorteile aus Fremdfinanzierung gemäß Gleichung (6.3.1) können annahmegemäß im Zeitpunkt der Insolvenz $(t+1)$ noch realisiert werden. Für alle Zeitpunkte s, mit $s > t$, in denen bereits eine Insolvenz des Unternehmens in t vorlag, können keine Steuervorteile aus Fremdfinanzierung mehr generiert werden, da das Unternehmen annahmegemäß eigenfinanziert weitergeführt wird.

Bevor eine Bewertungsgleichung aufgestellt wird, ist noch der Einfluss der Insolvenzwahrscheinlichkeit auf r_D über die Rating-Trigger Vereinbarung zu erläutern. Die im Zeitablauf mögliche Anpassung von r_D aufgrund einer Änderung der Ausfallwahrscheinlichkeit soll durch das zusätzliche Subskript t Rechnung getragen werden. Für ein nicht insolventes Unternehmens sind die Steuervorteile nun unter Berücksichtigung von $r_{D,t}$ in Gleichung (6.3.1) zu bestimmen, wobei die Ausfallwahrscheinlichkeit P^D aus vergangenheitsorientierten Werten in Abhängigkeit der verfolgten Verschuldungspolitik gemäß der Gleichungen (6.2.10) oder (6.2.11) zu ermitteln ist.

Die für die Bestimmung der zeit- und zustandsabhängigen Werte für TS^{Inso} können Tabelle 6.2 entnommen werden.

Zur Bestimmung der Auswirkungen einer Insolvenz auf den Wert des Tax Shields, ist

[50] Es wird später noch gezeigt, dass bei einer Insolvenz in einer Periode $s \leq t$ der Wert des Tax Shields in $t+1$ Null betragen würde.

Tabelle 6.2: Darstellung der zeit- und zustandsabhängigen Werte für TS^{Inso}

Zeit	**Zustand 1: keine Insolvenz** $\text{EBIT}_t \geq e^{r_{D,t-1}} D_{t-1} - D_t$	**Zustand 2: Insolvenz** $\text{EBIT}_t < e^{r_{D,t-1}} D_{t-1} - D_t$
t	$\tau\alpha\big(\text{EBITDA}_t - \max\big(0; \text{EBITDA}_t - \frac{1}{\alpha}(e^{r_{D,t-1}} - 1) D_{t-1}\big)\big)$	
$t+1$	$\tau\alpha\big(\text{EBITDA}_{t+1} - \max\big(0;$ $\text{EBITDA}_{t+1} - \frac{1}{\alpha}(e^{r_{D,t}} - 1) D_t\big)\big)$	0

eine Kombination von Optionen gesucht, welche die Zahlungsstruktur aus Tabelle 6.2 abbilden kann. Das TS_{t+1} entfällt, falls im Zeitpunkt t das EBIT die (Insolvenz-) Barriere $B = e^{r_{D,t-1}} D_{t-1} - D_t$ unterschreitet. Für diese Barriere liegt eine Modellierung mit einem Knock-Out-Barrieren-Call nahe. Wird die Down-And-Out-Barriere $e^{r_{D,t-1}} D_{t-1} - D_t$ unterschritten, kann TS_{t+1} nicht mehr realisiert werden.[51] An dieser Stelle wird auf eine solche Modellierung aus folgenden Gründen verzichtet: Die erforderliche Überprüfung der Barriere findet nur zum Zeitpunkt der Berichterstattung statt. Für Barriere-Optionen mit zeitdiskreter Überprüfung existiert keine geschlossene Bewertungsgleichung.[52] Weitere Erschwernisse sind in diesem Zusammenhang das ermittelte $r_{D,t}$ und das stochastische D_t bei Annahme wertorientierter Verschuldungspolitik, die eine veränderliche Barriere und einen veränderlichen Strike implizieren.

Unter Verwendung der charakteristischen Funktion $\mathbb{1}$ kann in Verbindung mit Gleichung (6.3.2) eine Gleichung zur periodengerechten Berechnung des Tax Shield, unter Berücksichtigung von Insolvenz und dem Einfluss der Ausfallwahrscheinlichkeit auf $r_{D,t}$, folgenderweise aufgestellt werden:

$$TS_{t+1}^{\text{Inso}} = \mathbb{1} \cdot \tau\alpha \left(\text{EBITDA}_{t+1} - \max\left(0; \text{EBITDA}_{t+1} - \frac{1}{\alpha}(e^{r_{D,t}} - 1) D_t \right) \right), \qquad (6.3.6)$$

[51] Weitere Modellierungsmöglichkeiten wären beispielsweise die Verwendung einer Asset-or-Nothing-Option. *Lodowicks* (2007) modelliert den Wegfall des Tax Shield in einem zeitdiskreten Modell mit einem Down-And-In-Call.

[52] Nach Kenntnis der Autoren existieren bisher nur Approximationsgleichungen zur Bewertung von Diskreten-Barriere-Optionen. Vgl. *Haug* (2007), S. 164 ff.

mit

$$\mathbb{1} = \begin{cases} 1 \text{ falls } \mathrm{EBIT}_t \geq e^{r_{D,t-1}} D_{t-1} - D_t \\ 0 \text{ falls } \mathrm{EBIT}_t < e^{r_{D,t-1}} D_{t-1} - D_t. \end{cases} \tag{6.3.7}$$

Die charakteristische Funktion $\mathbb{1}$ gemäß (6.3.7) nimmt den Wert 1 an, falls keine Insolvenz vorliegt und den Wert Null, falls Insolvenz vorliegt. Wenn $r_{D,t}$ und D_t in t bekannte Größen darstellen, kann unter Verwendung einer zu Abschnitt 6.3.1 ähnlichen Vorgehensweise die folgende analytische Bewertung aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} PV_t\left(TS_{t+1}^{\text{Inso}}\right) = \mathbb{1} \cdot \tau\alpha\,(&\mathrm{EBITDA}_t \\ &- \Big(\underbrace{\mathrm{EBITDA}_t \cdot N(d_1^{\text{Inso}}) + \frac{1}{\alpha}(e^{r_{D,t}} - 1) D_t e^{-r_f} \cdot N(d_2^{\text{Inso}})}_{=C^{\text{Inso}}}\Big)\Big), \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

wobei $d_1^{\text{Inso}} = \frac{\ln\left(\frac{\mathrm{EBITDA}_t}{\frac{1}{\alpha}(e^{r_{D,t}}-1)D_t}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}$ und $d_2^{\text{Inso}} = d_1^{\text{Inso}} - \sigma$ gilt.[53]

Ein Zahlenbeispiel für das Tax Shield bei Insolvenz

Für die Untersuchung des Einflusses von Insolvenz und risikoangepassten Fremdkapitalkosten auf den Wert des Tax Shield werden die im Beispiel aus Abschnitt 6.3.1 getroffenen Annahmen und Parameter verwendet. Aufgrund der unterschiedlichen Insolvenzbedingungen ist es sinnvoll zwischen wertorientierter und autonomer Finanzierungspolitik zu unterscheiden. Wir betrachten zunächst autonome Finanzierungspolitik mit $D_{t-1} = D_t = ... = D_T = 200$. Eine Kredittilgung entfällt durch diese Vereinfachung. Beträgt das EBITDA im Bewertungszeitpunkt t weniger als $7,61$, beziehungsweise beträgt das EBIT gemäß $\alpha \cdot \mathrm{EBITDA}_t$ weniger als $6,09$, so liegt Insolvenz vor. In $t+1$ werden dann keine periodengerechte Steuervorteile mehr realisiert. Die periodengerechten Steuervorteile betragen in $t+1$ demnach sicher 0 sofern $\mathrm{EBITDA}_t < 7,61$ ist. Bleibt die Firma solvent, wird in diesem Zahlenbeispiel der Maximalwert in Höhe von $2,13$ erreicht.

Bei wertorientierter Verschuldungspolitik ist der Sachverhalt komplexer. Hierzu wird

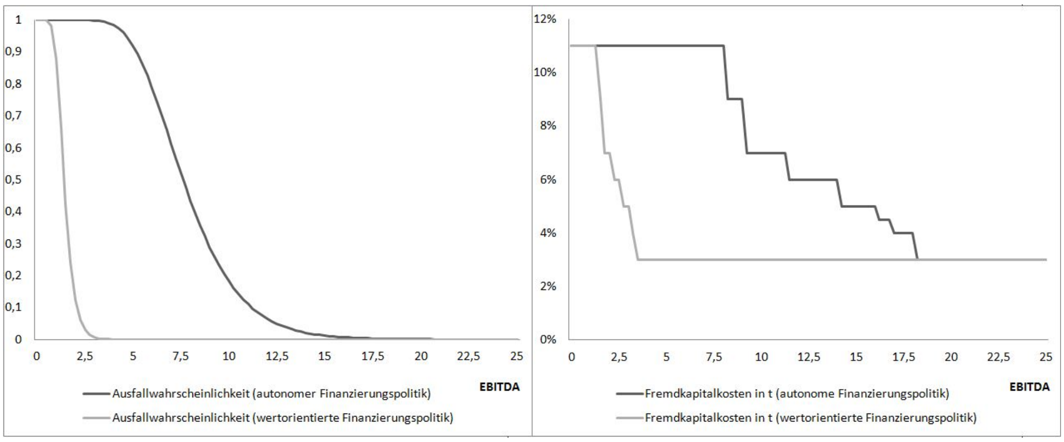
[53] C^{Inso} stellt den Wert einer Call-Option mit Strike $X = \frac{1}{\alpha}(e^{r_{D,t}} - 1)D_t$ dar. Eine Motivation des Beweises kann Anhang (D.2.2) entnommen werden.

von einer Fremdkapitalquote von $l = 0,5$ ausgegangen. Das zu prüfende Insolvenzkriterium ist durch $EBIT_t < e^{r_D} D_{t-1} - D_t$ gegeben. Nun ist der mögliche Insolvenzeintritt zusätzlich von der Kredittilgung $D_{t-1} - D_t$ abhängig. Es sei der Wert von D_{t-1} wieder mit 200 angenommen. Da D_t gemäß Gleichung (D.1.4) berechnet werden kann, besteht zwischen dem in t realisierten EBITDA_t und D_t eine Abhängigkeit.[54]

Sinkt EBIT_t beispielsweise auf 53, 62, so ergibt sich bei wertorientierter Finanzierungspolitik eine Kredittilgung von $D_{t-1} - Dt = 200 - 152,46 = 47,54$. Nach Hinzurechnung der Zinsen in Höhe von $(e^{r_D} - 1)D_{t-1} = (e^{0,03} - 1) \cdot 200 = 6,09$ ergeben sich Kreditleistungen von 53, 63. Diese können nicht aus dem EBIT erbracht werden und das Unternehmen ist insolvent.[55] Ist im Zeitpunkt t die Insolvenz eingetreten, dann kann in $t + 1$ kein Tax Shield mehr realisiert werden. Wird das Insolvenzkriterium in t nicht erfüllt, so hängen die in $t + 1$ realisierbaren periodengerechten Steuervorteile von D_t ab. Wird andernfalls ein EBITDA_t in Höhe von 75 angenommen, beträgt $D_t = 170,62$. Da das Unternehmen in t dann nicht insolvent ist, ergeben sich in der Folgeperiode Steuervorteile von bis zu 1, 82.

Wird in die Analyse die Anpassung der Fremdkapitalzinsen miteinbezogen, so ist für TS^{Inso}_{t+1}, $r_{D,t}$ auf Basis der Ausfallwahrscheinlichkeit P^D zu bestimmen. In Abhängigkeit von EBITDA_t können Abbildung 6.2 die Ausfallwahrscheinlichkeiten und die Fremdkapitalkosten $r_{D,t}$ für autonome und wertorientierte Verschuldungspolitik entnommen werden.

Abbildung 6.2: P^D und $r_{D,t}$ in Abhängigkeit vom EBITDA.



54 Diese Abhängigkeit ist konstant. Vgl. Formel D.1.6.

55 Werden andere Werte für D_{t-1} angenommen ergeben sich auch andere Werte für das Eintreten der Insolvenz.

Gleichungen (6.2.10) und (6.2.11) zeigen die Einflussfaktoren auf P^D und $r_{D,t}$:

- Die Höhe von D_{t-1} steigert P^D für autonome und wertorientierte Finanzierungspolitik. Bei autonomer Finanzierungspolitik führen höhere Fremdkapitalbestände zu höheren Zinsaufwendungen, die höhere Werte für P^D und damit auch für $r_{D,t}$ bedingen. Bei wertorientierter Finanzierungspolitik führen höhere Werte für D_{t-1} ebenfalls zu höheren Zinsaufwendungen und damit zu höherem P^D und $r_{D,t}$. Zusätzlich ist dabei noch die Tilgung $D_{t-1} - D_t$ zu berücksichtigen. Da D_t gemäß Gleichung (D.1.4) zu berechnen ist, hängt die Höhe der Tilgung vom realisierten EBITDA_t ab. Eine höhere Differenz $D_{t-1} - D_t$ führt zu höherem P^D und $r_{D,t}$.

- Die Volatilität hat einen erhöhenden Effekt auf die Ausfallwahrscheinlichkeit P^D für beide Finanzierungspolitiken. Eine zunehmende Streuung von EBITDA_{t+1} führt zu einer erhöhten Wahrscheinlichkeit, dass das Unternehmen insolvent wird.

- Die Höhe des EBITDA_t hat einen negativen Einfluss auf P^D. Höhere Werte des EBITDA_t führen damit ceteris paribus zu einem geringeren $r_{D,t}$.

- Geringere Werte für α führen zu höheren Abschreibungen und damit zu geringerem EBIT. Dies führt zu einem Ansteigen von P^D und damit von $r_{D,t}$.

- Zusätzlich treten Effekte durch $r_{D,t-1}$ auf, welche die Ausfallwahrscheinlichkeit beeinflussen. Höhere Zinsaufwendungen durch ein erhöhtes $r_{D,t-1}$ führen zu einem höheren P^D und damit auch zu höheren Werten von $r_{D,t}$.

6.3.3 Bewertung der Nächstjahres-Steuerersparnis mit Zinsschranke und mit Insolvenz

Herleitung der Bewertungsgleichung

Die steuerliche Zinsschrankenregelung führt dazu, dass Zinsaufwendungen oberhalb 30% des steuerlichen EBITDA nicht steuermindernd geltend gemacht werden können. Ignoriert man zunächst die steuermindernde Wirkung der Abschreibungsgegenwerte, repräsentiert durch α, und eine mögliche Insolvenz, dann lässt sich der Effekt auf die fremdfinanzierungsbedingten Steuervorteile in $t + 1$ unter Verwendung der Annahmen aus Abschnitt

6.2.3 wie folgt abbilden:

$$TS^{\text{ZS}}_{t+1} = \tau \max\left(0;\ \min\left(0{,}3 \cdot \text{EBITDA}_{t+1}; (e^{r_D} - 1)D_t + ZV_t\right)\right), \tag{6.3.9}$$

wobei der Zinsvortrag zu ermitteln ist durch

$$ZV_t = \max\left((e^{r_D} - 1)D_{t-1} + ZV_{t-1} - 0{,}3 \cdot \text{EBITDA}_t; 0\right). \tag{6.3.10}$$

Ein Vergleich mit Gleichung (6.3.1) für den Fall ohne Zinsschranke lässt leicht erkennen, dass die Wirkung der Zinsschranke auf die Steuerersparnis vergleichbar ist mit derjenigen des Parameters α, der die Abschreibungsgegenwerte repräsentiert: Für den Fall $\alpha = 30\%$ sind beide Fälle identisch. Wird die Wirkung der Abschreibung in die Analyse einbezogen, dann hat die Zinsschranke für $\alpha < 0{,}3$ keinerlei Auswirkungen auf den Wert der Steuervorteile. Die Abschreibungsgegenwerte erzeugen so hohe Aufwendungen, dass die gesamte Steuerbemessungsgrundlage EBIT immer unterhalb der 30% EBITDA-Grenze der Zinsschranke liegt. Für den Fall $\alpha > 0{,}3$ ist hingegen die "Shield"-Wirkung der Abschreibungen so gering, dass das EBIT die 30%-Grenze der Zinsschranke übersteigt und somit Wertverluste durch die eingeschränkte Abzugsfähigkeit der Zinsaufwendungen möglich sind. Unter Berücksichtigung von α erhält man somit folgende fremdfinanzierungsbedingten Steuervorteile bei Geltung der Zinsschranke TS^{ZS}_{t+1} und für $ZV_t = 0$:

- Für $\alpha < 0{,}3$ ergeben sich identische Steuerersparnisse wie im Fall ohne Zinsschranke mit $TS^{\text{ZS}}_{t+1} = TS_t = \tau \max\left(0; \min\left(\alpha \cdot \text{EBITDA}_{t+1}; \left(e^{r_D} - 1\right) D_t\right)\right)$
- Für $\alpha > 0{,}3$ hingegen ist ein "Greifen" der Zinsschranke möglich. Das realisierte Tax Shield beträgt $TS^{\text{ZS}}_{t+1} = \tau \max\left(0; \min\left(0{,}3 \cdot \text{EBITDA}_{t+1}; \left(e^{r_D} - 1\right) D_t\right)\right)$.

Durch das Zusammenführen der beiden Fälle und unter Berücksichtigung von $ZV_t \geq 0$, möglicher Insolvenz und risikoangepassten Fremdkapitalzinsen erhält man die folgende Gesamtformulierung der periodengerechten Steuervorteile bei Geltung der Zinsschrankenregelung:

$$\begin{aligned} TS^{\text{ZS,Inso}}_{t+1} = \mathbb{1} \cdot \tau \min(0{,}3; \alpha) \Bigg(\text{EBITDA}_{t+1} - \max \Bigg(0; \frac{1}{\min(0{,}3; \alpha)} \\ \cdot \left((e^{r_{D,t}} - 1)D_t + ZV_t\right) - \text{EBITDA}_{t+1}\Bigg)\Bigg). \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

Gleichung (6.3.11) lässt deutlich erkennen, dass der limitierende Effekt der 30%-Grenze mit dem begrenzenden Effekt der Abschreibung in "Konkurrenz" steht. Die periodengerechten Steuervorteile sind bereits ohne Berücksichtigung der Insolvenz und der risikoangepassten Fremdkapitalzinsen zusätzlich von der streng pfadabhängigen Variable ZV_t abhängig, die gemäß Gleichung (6.3.10) erweitert um risikoangepasste Fremdkapitalzinsen durch

$$ZV_t = \max\left(\left(e^{r_{D,t-1}} - 1\right)D_{t-1} + ZV_{t-1} - 0,3 \cdot \text{EBITDA}_t; 0\right) \tag{6.3.12}$$

zu berechnen ist. Sofern im Zeitpunkt t die Variablen D_t, ZV_t und $r_{D,t}$ bekannte Größen darstellen, kann der Barwert in t von $TS_{t+1}^{\text{ZS,Inso}}$ analytisch bestimmt werden:[56]

$$\begin{aligned} PV_t\left(TS_{t+1}^{\text{ZS,Inso}}\right) &= \mathbb{1} \cdot \tau \min(0,3; \alpha\,(\text{EBITDA}_t \\ &- \Bigg(\underbrace{\text{EBITDA}_t \cdot N(d_1^{\text{ZS}}) + \left(\frac{1}{\min(0,3;\alpha)}(e^{r_{D,t}} - 1)D_t + ZV_t\right) e^{-r_f} \cdot N(d_2^{\text{ZS}})}_{=C^{\text{ZS,Inso}}}\Bigg)\Bigg), \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

mit $d_1^{\text{ZS}} = \frac{\ln\left(\frac{\text{EBITDA}_t}{\frac{1}{\min(0,3;\alpha)} \cdot (e^{r_{D,t}} - 1) \cdot D_t + ZV_t}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}$ und $d_2^{\text{ZS}} = d_1^{\text{ZS}} - \sigma$.[57]

Soll nur der Wert des Tax Shield unter Berücksichtigung der Zinsschranke $PV_t\left(TS_{t+1}^{\text{ZS}}\right)$ berechnet werden, kann Gleichung (6.3.13) herangezogen werden, wenn $\mathbb{1} = 1$ gilt und wenn $r_{D,t}$ bekannt ist.

Ein Zahlenbeispiel über die Wirkung der Zinsschranke

Bevor sich dem bereits bekannten Zahlenbeispiel gewidmet wird, erfolgt zunächst zur Verdeutlichung eine Diskussion der Wirkung der Zinsschranke auf das Tax Shield ohne Berücksichtigung von Insolvenz und risikoangepassten Fremdkapitalzinsen.

Der Effekt der Zinsschranke auf den Wert des Tax Shield, ohne Berücksichtigung von Insolvenz und risikoangepassten Fremdkapitalzinsen, kann über die Differenz zwischen

[56] Auf einen expliziten Beweis von Gleichung (6.3.13) kann an dieser Stelle verzichtet werden, da eine Herleitung analog zu Anhang D.2.1 vorgenommen werden kann. Es ist lediglich der Strike X aus Gleichung (D.2.2) um ZV_t zu erhöhen und die untere Grenze des Integrals aus Gleichung (D.2.4) dementsprechend anzupassen.

[57] Eine Herleitung für den Term $C^{\text{ZS,Inso}}$ kann dem Anhang D.2.3 entnommen werden.

$PV_t\left(TS_t\right)$ und $PV_t\left(TS_{t+1}^{\mathrm{ZS}}\right)$ abgebildet werden:

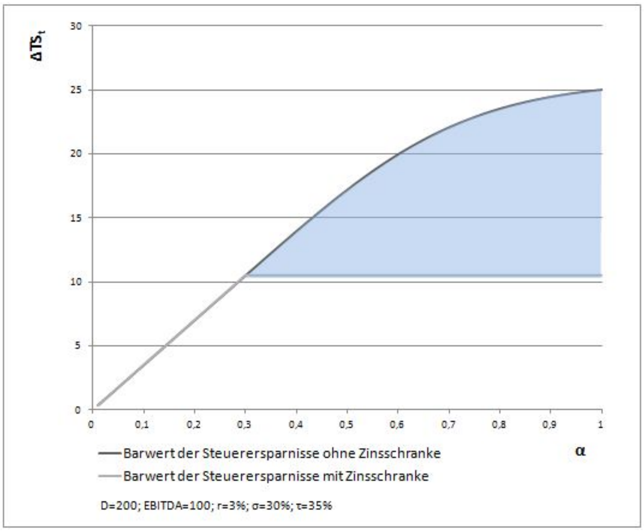
$$\begin{aligned}\Delta PV_t\left(TS_{t+1}\right) &= PV_t\left(TS_t\right) - PV_t\left(TS_t^{\mathrm{ZS}}\right) \\ &= \tau\alpha\left(\mathrm{EBITDA}_t - C\right) - \tau\min(0,3;\alpha)\left(\mathrm{EBITDA}_t - C^{\mathrm{ZS}}\right).\end{aligned} \tag{6.3.14}$$

Aus Gleichung (6.3.14) ist leicht erkennbar, dass für Werte von $\alpha < 30\%$ die steuerliche Zinsschranken-Regelung keinen Effekt auf den Wert des Tax Shield aufweist. $\Delta PV_t\left(TS_{t+1}\right)$ nimmt in diesem Falle den Wert Null an. Für $\alpha > 0,3$ können sich hingegen Verluste durch die Zinsschranke ergeben:

$$\Delta PV_t\left(TS_{t+1}\right) = \tau\alpha\left(\mathrm{EBITDA}_t - C\right) - \tau\cdot 0,3\left(\mathrm{EBITDA}_t - C^{\mathrm{ZS}}\right). \tag{6.3.15}$$

Abbildung 6.3 zeigt den Wertunterschied zwischen den Steuerersparnissen mit und ohne Zinsschranke in Abhängigkeit von α für die Zahlen des oben angegebenen Beispiels.

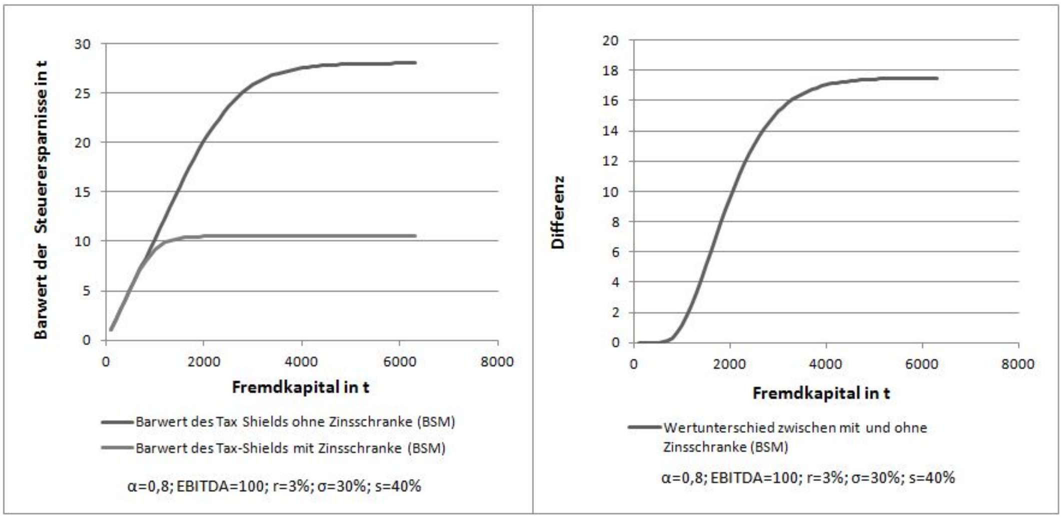
Abbildung 6.3: Wertverlust durch die Zinsschranke.



Die schraffierte Fläche repräsentiert den Wertverlust an Steuerersparnissen in t. Der Wertunterschied beziehungsweise der Wertverlust nimmt mit steigendem α zu. Dass Zinsaufwendungen mit anderen Aufwendungen (hier den Abschreibungen) um Steuerersparnisse konkurrieren ist Ökonomen lange bekannt. Diese Wirkung wird durch die Zinsschrankenregelung begrenzt.[58] Für $\alpha < 30\%$ wird das Potenzial für Steuerersparnisse bereits durch Abschreibungen in Gänze ausgeschöpft, sodass mögliche Steuerersparnisse durch Zinsaufwendungen nicht mehr wirksam werden können. Die Zinsschranke kann in diesem Fall mit ihrer zusätzlichen Begrenzung der Steuerersparnis keinen Effekt mehr ausüben. Höhere Werte von α lassen grundsätzlich signifikante Steuerersparnisse durch Zinsaufwendungen zu, für $\alpha > 30\%$ kann es daher durch die Zinsschranke zu einer Einschränkung der Generierung von Steuerersparnissen kommen.

Für $\alpha > 30\%$ beeinflusst die Höhe des Fremdkapitals die Höhe der durch die Zinsschranke verursachten Wertverluste. Ceteris paribus führt ein Anstieg des Fremdkapitals, und damit verbunden der Zinsaufwendungen, zu höheren Verlusten der fremdfinanzierungsbedingten Steuervorteile aufgrund der Zinsschrankenregelung. Die folgende Abbildung stellt den Verlauf der Wertverluste in Abhängigkeit des Fremdkapitalbestandes für die Zahlen des Beispiels dar:

Abbildung 6.4: Barwertvergleich der Tax Shields mit und ohne Zinsschranke und Wertverlust durch die Zinsschranke.



Der Wertverlust durch die Zinsschranke konvergiert bei steigendem Fremdkapital ge-

[58]Vgl. z.B. *DeAngelo* und *Masulis* (1980) die gezeigt haben, dass die Höhe des Tax Shield negativ von anderen steuerlichen Aufwandspositionen wie Abschreibungen, Verlustvorträgen etc. beeinflusst wird.

gen den Wert $\tau(\alpha - 0,3)\text{EBITDA}_t$. Dieser resultiert bei extrem hohen Fremdkapitalbeständen und gegebenen EBITDA_t, aus der Differenz zwischen dem maximal möglichen Wert der Steuerersparnis ohne Zinsschranke $\alpha\tau\text{EBITDA}_t$ und jenem Wert mit Zinsschranke $0,3\tau\text{EBITDA}_t$. Für niedrige Fremdkapitalbestände fällt die Options-Komponente des Portfolios als Wertbestandteil kaum mehr ins Gewicht. Der Wert der Steuerersparnis besteht in beiden Fällen nur noch aus der ersten Komponente EBITDA_t.

Die Prozess-Eigenschaften der steuerlichen Bemessungsgrundlage (Höhe des aktuellen EBITDA_t als Ausgangswert, Drift und Volatilität der Änderungsrate) haben ebenfalls Einfluss auf die Höhe des Wertverlustes durch die Zinsschranke:

- Die Volatilität des EBITDA-Prozesses hat Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit, dass die Begrenzung der steuerlichen Abzugsfähigkeit der Zinsaufwendungen durch die Zinsschranke (im Fall mit Zinsschranke) beziehungsweise die Begrenzung durch die entsprechenden Abschreibungsgegenwerte (im Fall ohne Zinsschranke) auftritt. Für $\alpha > 0,3$ erhöht sich bei steigender Volatilität die Wahrscheinlichkeit für künftige EBITDA-Ausprägungen zwischen $\frac{1}{\alpha}(e^{r_D-1})D_t$ und $\frac{1}{0,3}(e^{r_D-1})D_t$. Der Wertverlust durch die Zinsschranke steigt somit bei steigender Volatilität des EBITDA-Prozesses.

- Die Höhe des aktuell realisierten EBITDA steuert als Ausgangswert des Prozesses gemeinsam mit der Driftrate das erwartete Niveau der künftigen EBITDA und Steuerbemessungsgrundlagen. Der Wertverlust durch die Zinsschranke sinkt ceteris paribus bei steigender aktueller Steuerbemessungsgrundlage.

Die bisherigen Ergebnisse können anhand des Zahlenbeispiels veranschaulicht werden. Dazu wird zusätzlich zu $\alpha = 0,8$ noch der Fall $\alpha = 0,1$ betrachtet. Für den Fall $\alpha = 0,1 < 0,3$, bei dem die Zinsschranke nicht greifen kann, erzielt das Unternehmen bis zu einem EBITDA_{t+1} von der Höhe eines Zinsaufwandes gemäß $\frac{1}{\alpha}(e^{r_{D,t}} - 1)D_t$ für jeden zusätzliche Euro EBITDA eine Steuerersparnis in Höhe von $\alpha\tau\text{EBITDA}_{t+1}$. Im Beispiel entspricht dies $0,1 \cdot 0,35 \cdot \text{EBITDA}_{t+1} = 0,035 \cdot \text{EBITDA}_{t+1}$. Die maximale Ausschöpfung der Steuerersparnis wird bei einem EBITDA von $60,90$ erreicht. Bei der Wahl von $\alpha = 0,8 > 0,3$ wirkt die Zinsschranke. Infolgedessen beträgt der inkrementelle Anstieg der Steuerersparnis bis zur maximalen Grenze nur noch $0,3\tau\text{EBITDA}_{t+1}$ für jede zusätzliche

Einheit EBITDA_{t+1}. Im Beispiel ergibt sich entsprechend $0,3 \cdot 0,35 \cdot \text{EBITDA}_{t+1} = 0,105 \cdot \text{EBITDA}_{t+1}$. Die maximale Steuerersparnis wird in betrachteter Konstellation falls $\text{EBITDA}_{t+1} = \frac{1}{0,3}(e^{r_{D,t}} - 1)D_t = 20,3$ erreicht.

Werden die risikoangepassten Fremdkapitalzinsen betrachtet, so lässt sich in Ergänzung zu den bereits vorgenommenen Analysen feststellen, dass P^D über die dementsprechende Anpassung von $r_{D,t}$ das Greifen der Zinsschranke beeinflusst. Eine Erhöhung von P^D führt zu höherem $r_{D,t}$ und erhöht die Wahrscheinlichkeit des Greifens der Zinsschranke und vice versa. Tritt bei dem hier betrachteten Unternehmen in t Insolvenz ein, so fallen, wie bereits oben festgestellt, ab $t+1$ alle weiteren Tax Shields weg. Da das Unternehmen eigenfinanziert weitergeführt wird, sind auch alle bis zum Zeitpunkt der Insolvenz angesammelten Zinsvorträge für die weitere Bewertung irrelevant.

6.4 Die Bewertung der gesamten Steuerersparnis

6.4.1 Bewertung bei Betrachtung von mehr als einem Jahr

Der Wert der Steuervorteile unter Berücksichtigung von Insolvenz, risikoadäquater Anpassung der Fremdkapitalkosten und Zinsschranke kann bei periodengerechter Betrachtung berechnet werden. Wird der Modellrahmen auf mehr als eine Periode erweitert, können keine geschlossenen Bewertungsgleichungen abgeleitet werden. Ursache hierfür ist die strenge Pfadabhängigkeit der periodengerechten Steuerersparnisse.[59]

Für den Fall ohne Zinsschranke ergibt sich die Pfadabhängigkeit des Tax Shield durch die mögliche Insolvenz in den Vorperioden sowie die Anpassung von Fremdkapitalkosten. Bei Berücksichtigung der Zinsschranke tritt der Zinsvortrag hinzu, dessen Höhe von gege-

[59] Soll der Wert des Tax Shield in $T > t+1$ zu einem Bewertungszeitpunkt t ermittelt werden, ist zur Bestimmung von $C^{\text{ZS,Inso}}$ das folgende Integral zu berechnen

$$C^{\text{ZS,Inso}} = e^{-r_f(T-t)} \int_X^\infty (\text{EBITDA}_T - X)\, f_{\mathbb{Q}}(\text{EBITDA}_T) d\text{EBITDA}_T,$$
$$\text{mit } X = \frac{1}{\min(0,3;\alpha)}\,(e^{r_{D,T-1}} - 1)\, D_{T-1} + ZV_{T-1}.$$

Demnach ist ein Integral über die pfadabhängigen Zufallsvariablen $r_{D,T-1}$, D_{T-1} und ZV_{T-1} zu lösen. Da diese Paramter bei Betrachtung mehrerer Perioden in t unbekannt sind, ist die Aufstellung einer geschlossenen Bewertungsgleichung im Rahmen eines *Black/Scholes/Merton*-Modellrahmens nicht mehr möglich.

benfalls in den Vorperioden eingetretenen Bedingungen für das Greifen der Zinsschranke abhängig ist. Zur Lösung des Problems bietet sich die Verwendung einer Monte-Carlo-Simulation[60] an, in der jede Periode einem Jahr (Beobachtungszeitpunkt = Ende des Jahres) entspricht. Für das EBITDA wird unter Vorgabe des stochastischen Prozesses (6.2.1) eine große Anzahl von Simulationsläufen durchgeführt, in deren Verlauf jeweils eine zeitliche Entwicklung der entsprechenden Größen simuliert wird. Für jeden durchgeführten Lauf wird basierend auf dem realisierten Entwicklungspfad die entsprechende fremdfinanzierungsbedingte Steuerersparnis pro Jahr ermittelt und deren Barwert berechnet. Durch Wiederholung der Simulationsläufe lässt sich eine Verteilung von Werten der Steuerersparnisse und deren Erwartungswert berechnen.

Wir betrachten wieder die drei Fälle ohne Insolvenz, mit Insolvenz und risikoangepassten Fremdkapitalzinsen sowie Insolvenz und Zinsschranke. Die Laufzeit beträgt bei allen Simulationsläufen $N = 300$ Jahre, um eine Konvergenz zu den theoretischen Ergebnissen des Rentenmodells mit unendlicher Laufzeit herstellen zu können.[61] Dazu ist es notwendig eine hohe Anzahl an Simulationsläufen durchzuführen. Die Anzahl der Simulationsdurchläufe für jede Variante wurde daher auf 100.000 gesetzt. Bei Durchführung der Simulation sind die in Kapitel 6.2 aufgeführten Annahmen zu beachten.

6.4.2 Simulationsergebnisse

Autonome Finanzierungspolitik

Der Fremdkapitalbestand in $t = 0$ wird auf $D_0 = 200$ beziehungsweise $D_0 = 400$ festgelegt und bleibt bis $N = 300$ konstant. Es wird ein EBITDA-Prozess ohne Wachstum ($\mu = 0$) mit einer Volatilität von 15% beziehungsweise 25% angenommen. EBITDA_0 ist als Ausgangswert für die Simulation mit einem Wert von 100 angenommen. Der Faktor α beträgt 80% und EBIT_0 beträgt somit 80. Der Unternehmenssteuersatz wird mit 35% festgelegt. Der zu Beginn der Simulation geltende risikoangepasste Fremdkapitalzinssatz beträgt, der in $t = 0$ geltenden Ausfallwahrscheinlichkeit entsprechend, 4%. Im Fall mit möglichem Insolvenzeintritt werden die Kreditkonditionen zu Beginn jeder Periode anhand der ermit-

[60] Das gesamte Modell wurde in Matlab programmiert.
[61] Vgl. *Frühling* (2009), S. 200.

telten Ausfallwahrscheinlichkeit gemäß Gleichung (6.2.10) unter Anwendung der Rating Tabelle 6.1 angepasst. Bei Eintritt der Insolvenzbedingung wird der Simulationslauf nach Realisierung der Steuerersparnis beendet. Für jeden Pfad wird für alle Jahre bis $N = 300$ die fremdfinanzierungsbedingte Steuerersparnis ermittelt. Die Bewertung erfolgt durch die periodenweise Diskontierung mit dem risikoangepassten Fremdkapitalzinssatz $r_{D,t}$. Im Fall mit Zinsschranke wird für jeden Simulationspfad in jeder Periode geprüft, ob die Bedingung (6.3.9) erfüllt ist. Greift die Zinsschranke, wird ein entsprechender Zinsvortrag gebildet, der in späteren Perioden aufgelöst werden kann. Die Bedingung für den Insolvenzeintritt gilt unverändert.

Tabelle 6.4.2 zeigt die Ergebnisse der drei Fälle für vier Beispiele mit unterschiedlichen Kombinationen aus Volatilität und Fremdkapitalbeständen.[62]

Tabelle 6.3: Erwartungswert der Steuerersparnisse bei autonomer Finanzierungspolitik für unterschiedliche Beispiele und Modellszenarien.

Modellszenario	**Beispiel 1** $D = 200$ $\sigma = 0,15$	**Beispiel 2** $D = 200$ $\sigma = 0,25$	**Beispiel 3** $D = 400$ $\sigma = 0,15$	**Beispiel 4** $D = 400$ $\sigma = 0,25$
Theoretischer Wert	70	70	140	140
Fall 1: Ohne Negativsteuer, ohne Insolvenz, ohne Zinsschranke	$69,31$	$66,31$	$136,24$	$121,82$
Wertverlust	$-0,99\%$	$-5,27\%$	$-2,69\%$	$-12,99\%$
Fall 2: Mit Insolvenz, ohne ZS	$66,34$	$53,99$	$120,05$	$86,71$
Wertverlust	$-5,23\%$	$-22,87\%$	$-14,25\%$	$-38,06\%$
Fall 3: Mit Insolvenz, mit ZS	$65,72$	$52,84$	$116,63$	$82,85$
Wertverlust	$-6,11\%$	$-24,51\%$	$-16,69\%$	$-40,82\%$
zusätzlicher Wertverlust durch die Zinsschranke	$-0,88\%$	$-1,64\%$	$-2,44\%$	$-2,76\%$

Der theoretische Wert des Tax Shield im Rentenmodell für die autonome Finanzierungspolitik ergibt sich gemäß Gleichung 6.2.4 mit $\tau \cdot D_0 = 70$ (Beispiel 1 und 2) beziehungsweise 140 (Beispiel 3 und 4). Die Simulationsergebnisse konvergieren im Modellszenario "theoretischer Wert" gegen diesen Wert. Der Wegfall der Negativsteuer und die Einführung einer möglichen Insolvenz führt bei niedriger Volatilität und moderatem Kreditbetrag zu einer Verringerung des Barwertes der Steuerersparnisse um $5,23\%$ auf $66,34$. Die zusätzliche

[62] Im Modell können auch deterministische, nicht-konstante Fremdkapitalstände definiert werden, worauf im Sinne der Nachvollziehbarkeit der Beispiele verzichtet wird.

Einführung der Zinsschranke in Fall 3 hat dagegen keinen nennenswerten Werteinfluss: Der Wert der Steuerersparnisse sinkt gegenüber Fall 2 mit Insolvenz/ohne Zinsschranke nur um weitere $0,88\%$.

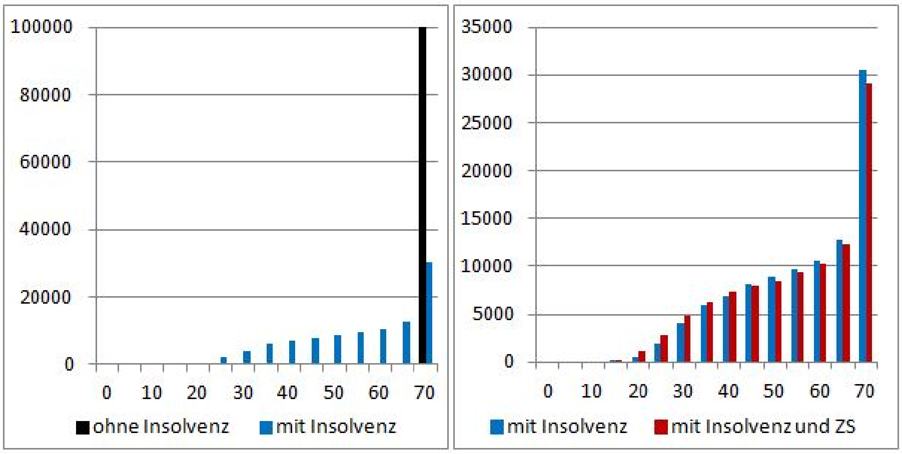
Die Erhöhung der Volatilität und/oder des Kreditvolumens in den Beispielen 2 bis 4 führt zu einer deutlich höheren Wirkung der Insolvenz auf das Tax Shield. In Tabelle 6.4.2 sind die Veränderungen der Werte im Vergleich zu den Werten im Fall ohne Insolvenz angegeben: Sie betragen zwischen $14,25\%$ und $38,06\%$. Dagegen fällt die zusätzliche Veränderung der Zinsschranke wieder kaum ins Gewicht: Der Wert des Tax Shield sinkt lediglich um weitere $1,64\%$ bis $2,76\%$.

Anhand der 100.000 Simulationspfade ist es möglich eine Verteilungen der Ergebnisse durch Histogramme darzustellen. Im Fall ohne Insolvenz wurde in jedem Lauf eine Steuerersparnis von 70 erreicht. Abbildung 6.5 zeigt links ein Histogramm der Tax Shield - Werte aus Beispiel 2 für die Fälle ohne und mit Insolvenz. Es ist zu erkennen, dass ohne Negativsteuer und bei möglicher Insolvenz häufig nicht die gesamte Steuerersparnis von 70 bis $N = 300$ generiert werden kann. Es resultiert ein erwarteter Barwert von $53,99$. Auf der rechten Seite von Abbildung 6.5 wurde die Verteilung der Werte für den Fall mit Insolvenz sowie den Fall mit Insolvenz und Zinsschranke jeweils unter Verwendung risikoangepasster Fremdkapitalzinsen dargestellt. Trotz des geringen Werteinflusses von $-1,64\%$ ist zu erkennen, dass die Zinsschranke die Verteilung der Steuerersparnisse weiter nach links verschiebt.

Im genannten Beispiel 2 kommt es bei der Laufzeit von 300 Jahren bei 98.879 von 100.000 Pfaden zur Insolvenz des Unternehmens. Da diese allerdings im Mittel im 57. Jahr eintrifft, ist ihr Werteffekt gering. Die Ursachen sind die hohe Volatilität von $0,25$ und die unterstellte autonome Finanzierungspolitik ohne Wachstum, die bis in alle Ewigkeit fortgeführt wird.[63] Im Beispiel 2 Fall 3 kommt es durchschnittlich nur sechsmal pro Simulationslauf zum Greifen der Zinsschranke.

[63]Diese Beobachtung kann als Bestätigung der Aussage von *Massari*, *Roncaglio* und *Zanetti* (2007) gesehen werden, dass eine autonome Finanzierungspolitik in die Insolvenz führen muss.

Abbildung 6.5: Histogramm-Vergleich zu Beispiel 2 der Modellszenarien mit Negativsteuer und ohne Insolvenz (schwarz), ohne Negativsteuer und mit Insolvenz (blau) sowie ohne Negativsteuer, mit Insolvenz und Zinsschranke (rot).



Wertorientierte Finanzierungspolitik

Für die Analyse der wertorientierten Finanzierungspolitik werden als Ausgangswerte wieder $\text{EBITDA}_0 = 100$ und $\alpha = 0,8$ angenommen. Für die Bewertung des unverschuldeten Unternehmens wird von Eigenkapitalkosten bei Eigenfinanzierung r_τ^u von 12% ausgegangen. Für die wertorientierte Strategie der Fremdfinanzierung wurde ein konstanter Verschuldungsgrad l für alle t in Höhe von 20% (Beispiel 5 und 6) beziehungsweise 40% (Beispiel 7 und 8) vorgegeben. Die Volatilität bleibt unverändert bei 15% beziehungsweise 25%.

Der Fremdkapitalzinssatz in der ersten Periode beträgt 4%. Die Anpassung des Fremdkapitalzinssatzes an geänderte Kreditrisiken wird auch bei wertorientierter Finanzierungspolitik in den beiden Fällen mit möglicher Insolvenz durchgeführt. Die Berechnung der dafür erforderlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten erfolgt über Gleichung (6.2.11).

Maßstab für die Güte der Simulationsrechnung ist wiederum die Konvergenz mit dem Ergebnis der Tax Shield-Formel (6.2.6). Das soll kurz in einer Rechnung für die Verschuldungsquote von $l = 0,2$ erläutert werden: Die korrespondierenden zeitdiskreten Werte für die vorgegebenen zeitstetigen Werte r_τ^u und r_D betragen 12,75% beziehungsweise 4,08%. Der Wert bei Eigenfinanzierung konvergiert gegen $V_0^U = \frac{(1-0,35)\cdot 80}{0,1275} = 407,85$. Daraus lässt sich über $V_0^L = V_0^U/(1 - l \cdot \tau \cdot \frac{r_D(1+r_\tau^u)}{r_\tau^u(1+r_D)})$ der Unternehmenswert bei anteiliger Fremdfinanzierung und über $D_0 = l \cdot V_0^L$ der Fremdkapitalbestand in $t = 0$ ableiten. Somit errechnet sich ein Fremdkapitalbestand in $t = 0$ in Höhe von $83,60$. Das Tax Shield beträgt gemäß Gleichung (6.2.6) somit

$$V_0^{TS} = \tau \cdot D_0 \cdot \frac{r_D(1 + r_\tau^u)}{r_\tau^u(1 + r_D)} = 0,35 \cdot 83,60 \cdot \frac{0,0408(1,1275)}{0,1275(1,0408)} = 10,15.$$

Für eine Verschuldungsquote von $0,4$ ergibt sich ein Wert für den Fremdkapitalbestand in $t = 0$ von $20,81$. Tabelle 6.4.2 zeigt die Ergebnisse der Modellszenarios für vier Beispiele mit unterschiedlichen Kombinationen aus Volatilität $\sigma = 15\%$ und $\sigma = 25\%$,[64] sowie Verschuldungsquoten $l = 0,2$ und $l = 0,4$.

Tabelle 6.4: Erwartungswert der Steuerersparnisse bei wertorientierter Finanzierungspolitik für unterschiedliche Beispiele und Modellszenarien.

Modellszenario	**Beispiel 5** $l = 0,2$ $\sigma = 0,15$	**Beispiel 6** $l = 0,2$ $\sigma = 0,25$	**Beispiel 7** $l = 0,4$ $\sigma = 0,15$	**Beispiel 8** $l = 0,4$ $\sigma = 0,25$
Theoretischer Wert	$10,15$	$10,15$	$20,81$	$20,81$
Fall 1: Ohne Negativsteuer, ohne Insolvenz, ohne Zinsschranke	$10,15$	$10,12$	$20,80$	$20,76$
Wertverlust	$0,00\%$	$-0,30\%$	$-0,05\%$	$-0,24\%$
Fall 2: Mit Insolvenz, ohne ZS	$10,15$	$9,84$	$19,44$	$13,61$
Wertverlust	$-0,01\%$	$-3,02\%$	$-6,58\%$	$-34,60\%$
Fall 3: Mit Insolvenz, mit ZS	$10,15$	$9,84$	$19,44$	$13,61$
Wertverlust	$-0,01\%$	$-3,02\%$	$-6,58\%$	$-34,60\%$
zusätzlicher Wertverlust durch die Zinsschranke	$0,00\%$	$0,00\%$	$0,00\%$	$0,00\%$

Die Simulationsergebnisse konvergieren im Fall ohne Insolvenz gegen die theoretischen Tax Shield-Werte von $10,15$ beziehungsweise $20,81$. Es ist im Beispiel 5 mit niedriger Volatilität und Verschuldungsquote zu erkennen, dass die Einführung der Insolvenzmöglichkeit kaum eine Verringerung des Barwertes der Steuerersparnisse zur Folge hat. Die zusätzliche Einführung der Zinsschranke hat wiederum keinen Werteinfluss.

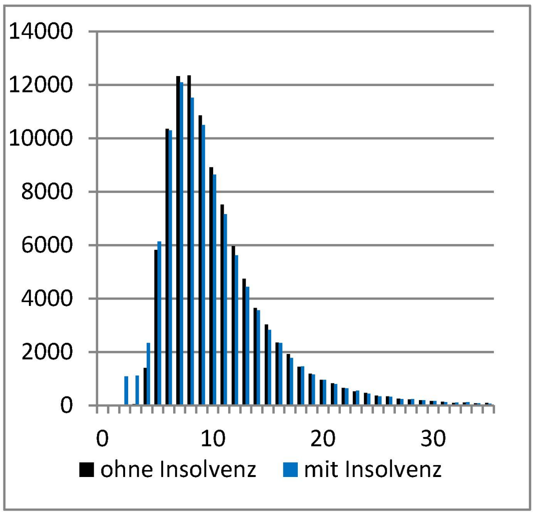
Die Erhöhung der Volatilität und/oder des Kreditvolumens in den Beispielen 6 bis 8 führt dagegen zu deutlichen Effekten der Insolvenz auf den Wert des Tax Shield. In Tabelle

[64]Dabei wird angenommen, dass eine Änderung der Volatilität keinen Einfluss auf r_τ^u hat.

6.4.2 sind die Veränderungen der Werte im Vergleich zu den Werten ohne Insolvenz angegeben: Sie betragen zwischen $3,02\%$ und $34,60\%$, während die zusätzliche Einführung der Zinsschranke auch in diesen Beispielen keinen Einfluss auf den Wert der Steuerersparnisse haben.

Die Abbildung 6.6 visualisiert die Verteilung der Steuerersparnisse für das Beispiel 6 ohne beziehungsweise mit der Möglichkeit einer Insolvenz. Die Verteilung des Tax Shield-Wertes bei wertorientierter Finanzierungspolitik ist stark rechtsschief. Die Ursache dafür ist, dass die künftigen Fremdkapitalbestände und die damit verbundenen Steuerersparnisse vom log-normalverteilten EBITDA-Prozess abhängen. Durch Aufnahme der Insolvenzmöglichkeit wird die Verteilung leicht nach links verschoben. Die Ursache für den geringen Insolvenz-Effekt von $3,02\%$ ist die im Rahmen der wertorientierten Finanzierungspolitik unterstellte Anpassung des Fremdkapitalbestandes: Da unter dieser Annahme bei einem Rückgang des EBITDA ebenfalls das ausstehende Fremdkapital reduziert wird, ist die Wahrscheinlichkeit eines Insolvenzeintritts in jedem Jahr niedrig. Auf einen Vergleich der Verteilung für den Fall mit Insolvenz sowie mit Insolvenz und Zinsschranke wird hier verzichtet, da die Häufigkeitsverteilungen nahezu gleich sind.

Abbildung 6.6: Histogramme Beispiel 6 zum Vergleich der Modellszenarios ohne Insolvenz (schwarz) und mit Insolvenz (blau).

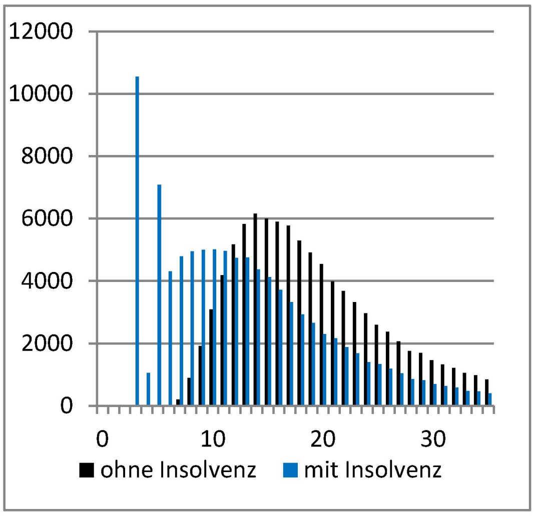


Auch für Beispiel 6 wird anhand der 100.000 Simulationspfade eine Analyse der Verteilung der Steuerersparnisse durchgeführt. Die Unternehmung geht in 90.230 von 100.000 Simulationsläufen bis $N = 300$ insolvent. Allerdings liegt eine Insolvenz im Mittel im 91.

Jahr vor, so dass kein signifikanter Werteffekt zustande kommt. Die unterstellte Anpassung des Fremdkapitalbestandes verringert ebenfalls die Wahrscheinlichkeit, dass es zu einem Greifen der Zinsschranke kommt. Im Szenario mit Zinsschranke kommt es pro Simulationslauf mit maximal 300 Jahren im Mittel näherungsweise nur viermal zum Eintreten der entsprechenden Bedingung. Der Werteffekt ist allerdings gering, da der Zinsvortrag fast immer sofort im nächsten Jahr genutzt wird.

Erst bei Verdopplung der Verschuldungsquote ist eine deutliche Wirkung der Insolvenz auf die Verteilung der Tax Shield Werte im Histogramm erkennbar. Die Abbildung 6.7 stellt dies für die Simulationsläufe von Beispiel 8 dar: Der theoretische Tax Shield-Wert beträgt $20,81$. Im Vergleich zur vorhergehenden Grafik ist die Streuung der Werte in beiden Fällen deutlich größer. Im Fall 2 generieren viele Pfade eine geringe Steuerersparnis auf Grund des Insolvenzeintritts. Die Verschuldungsquote von $0,4$ führt kombiniert mit der hohen Volatilität von $0,25$ dazu, dass das Unternehmen in jedem Jahr signifikante Insolvenzwahrscheinlichkeiten aufweist. Da auch in diesem Fall die Zinsschranke keinen Werteffekt aufweist, kann wieder auf ein weiteres Histogramm verzichtet werden.

Abbildung 6.7: Histogramme Beispiel 8 zum Vergleich der Modellszenarios ohne Insolvenz (schwarz) und mit Insolvenz (blau).



Die Analyse der einzelnen Simulationsläufe für Beispiel 8 ergibt, dass die Unternehmung in fast allen Simulationsläufen über die 300 Jahre Laufzeit insolvent wird. Dies ist im Mittel im 9. Jahr der Fall, was den hohen Wertabschlag von 34% bei der Steuerersparnis erklärt. Die Aufnahme der Zinsschranke ins Modell führt pro Simulationslauf sehr selten zu deren

Greifen und daher ergeben sich wiederum keine Werteffekte.

Interpretation der Ergebnisse

In der vorgenommenen Analyse wurde der Wert des Tax Shield bei möglichem Insolvenzeintritt und unter Gültigkeit der Zinsschrankenregelung ermittelt. Dabei wurden folgende Einflussfaktoren identifiziert:

- Ein Anstieg der Volatilität des EBITDA-Prozesses verringert den Wert der fremdfinanzierungsbedingten Steuervorteile. Die damit verbundene Erhöhung der Insolvenzwahrscheinlichkeit führt zu deutlichen Wertverlusten bei beiden Finanzierungspolitiken. Der zusätzliche Wertverlust durch die Zinsschranke steigt bei der autonomen Finanzierungspolitik ebenfalls bei zunehmender Volatilität. Bei der wertorientierten Politik kommt es meist zu einer zeitnahen Nutzung des Zinsvortrages, da der Fremdkapitalbestand jedes Jahr angepasst wird.

- Ein Anstieg des Fremdkapitalvolumens oder des Verschuldungsgrades erhöht zunächst den Wert des Tax Shield. Allerdings steigt auch die Abweichung vom Wert nach den Tax Shield-Formeln durch die Berücksichtigung der Insolvenz. Der Wertverlust durch die Zinsschranke wächst bei steigendem Kreditbetrag in der autonomen Finanzierungspolitik.

- Bei der Analyse des Simulationsmodells zeigte sich, dass eine Erhöhung der Fremdkapitalkosten bei autonomer Finanzierungspolitik nur selten zur Erhöhung der Steuerersparnis im nächsten Jahr führt. Vielmehr kommt es durch den Anstieg der Zinsen häufig im darauffolgenden Jahr zur Insolvenz, weil die Fremdkapitalzahlungen nicht geleistet werden können. Bei wertorientierter Finanzierungspolitik kommt es wie erwartet nur selten zu einer Verschlechterung des Ratings und einer damit verbundenen Anpassung von $r_{D,t}$, da der Fremdkapitalbestand jedes Jahr angepasst wird.

- Für die Analyse wurde das Rentenmodell ohne Wachstum unterstellt. Bei autonomer Finanzierung tritt in $N = 300$ mehrheitlich Insolvenz ein. Die Modellierung von Wachstum ist über den Parameter μ möglich, ist bei unendlicher Laufzeit allerdings zu plausibilisieren. Auch bei wertorientierter Finanzierungspolitik droht häufig ein

Insolvenzeintritt: Durch die Anpassung des Fremdkapitalbestandes weist die Firma jedes Jahr eine signifikante Insolvenzwahrscheinlichkeit auf.

In allen hier betrachteten Fällen zeigt sich, dass der durch die Zinsschranke verursachte Wertverlust nur moderat ausfällt und die Zinsschranke nur selten greift. Die Kritik aus der Praxis an den steuerlichen Regelungen kann durch die vorliegenden Ergebnisse nicht gestützt werden.

6.5 Zusammenfassung

Der vorliegende Aufsatz postuliert ein Modell zur Bewertung von Unternehmen bei autonomer und wertorientierter Finanzierung unter der Annahme, dass das steuerrechtliche EBITDA einer geometrisch Brownschen Bewegung folgt. Die Vorteile der Fremdfinanzierung nach der Trade-Off-Theorie berechnen sich anhand von Steuerersparnissen (Tax Shield) im Rahmen des bekannten APV Ansatzes. Das Modell wurde schrittweise um realitätsnahe Bedingungen erweitert um die Kosten der Fremdfinanzierung darzustellen. Zuerst wurde die Negativsteuer ausgeschlossen. Im Anschluss wurde im Modell Insolvenz ermöglicht, wobei die mögliche Anpassung des Kreditzinssatzes bei einer Veränderung der Ausfallwahrscheinlichkeit mit Hilfe eines Ratingmechanismus umgesetzt wurde. Als Letztes wurde die Zinsschrankenregelung eingeführt, die seit der Unternehmenssteuerreform 2008 in Theorie und Praxis diskutiert wurde.

Die gesetzten Annahmen erforderten eine optionspreistheoretische Diskussion der Steuerersparnisse. Aufgrund der Pfadabhängigkeit von zeitlich veränderlichen Fremdkapitalkosten, Zinsvortrag der Zinsschrankenregelung und durch die Insolvenz ist eine analytisch geschlossene Lösung nicht möglich. Deshalb wurde das Bewertungsproblem numerisch gelöst und es konnten Beispiele für beide Finanzierungspolitiken betrachtet werden. Zusammenfassend lässt sich der Schluss ziehen, dass die Zinsschranke kaum Einfluss auf den Wert der Steuerersparnisse hat. Der Effekt auf den Unternehmenswert ist bei passiver und aktiver Finanzierungspolitik selbst unter Vernachlässigung des EBITDA-Vortrages minimal. Eine Beachtung der Zinsschranke sollte in der Praxis bei der Bewertung von Unternehmen daher allenfalls in begründeten Ausnahmefällen stattfinden. Demgegenüber hat die Berücksichtigung einer möglichen Insolvenz, hier definiert als Zahlungsunfähigkeit, einen weitaus größeren Einfluss auf den Wert des Tax Shield. Die Abweichungen gegenüber dem Fall ohne Insolvenz sind bei autonomer und wertorientierter Finanzierungspolitik bei hoher Volatilität der Ertragsgröße EBITDA signifikant. Die Untersuchung weiterer Insolvenzbedingungen sollte in der Finanzierungsliteratur vorangetrieben werden.

Ein weiterer Beitrag zur Literatur wurde im Rahmen der ratingbasierten Anpassung der Fremdkapitalkosten gegeben. Diese hatten bei autonomer Finanzierungspolitik eine deutliche Erhöhung der Insolvenzwahrscheinlichkeit zur Folge. Gerät ein Unternehmen durch einen Rückgang des EBITDA in die Krise, wird diese durch die Erhöhung des Fremdkapitalzinssatzes noch verschärft. Bei wertorientierter Finanzierung gibt es kaum Auswirkungen auf den Wert des Tax Shield, da hier die Reaktion der Gläubiger auf die geänderten EBITDA-Eigenschaften durch die Anpassung des Kreditvolumens ausreicht.

Anhang D

D.1 Herleitung der Ausfallwahrscheinlichkeiten

D.1.1 Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit unter autonomer Verschuldungspolitik

In diesem Abschnitt soll die Insolvenzwahrscheinlichkeit gemäß dem Zahlungsunfähigkeitskriterium für autonome Verschuldungspolitik (6.2.9) bestimmt werden. Die fundamentale Unsicherheitsquelle, die einen Ausfall bedingt, soll in diesem Zusammenhang das EBITDA sein. Die Ausfallwahrscheinlichkeit in s unter autonomer Verschuldungspolitik ist gegeben durch $P^D\left(\mathrm{EBIT}_s < (e^{r_D} - 1) \cdot D_{s-1}\right)$. Unter Verwendung von Gleichung (6.2.1) und $0 \leq t \leq s-1$ kann die folgende Umformung vorgenommen werden:

$$
\begin{aligned}
&P^D\left(\mathrm{EBIT}_s < (e^{r_D} - 1) \cdot D_{s-1}\right) \\
&\quad = P^D\left(\mathrm{EBIT}_t \cdot e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t) + \sigma W_{s-t}} < (e^{r_D} - 1) \cdot D_{s-1}\right) \\
&\quad = P^D\left(W_{s-t} < \frac{\ln\left(\frac{(e^{r_D}-1)\cdot D_{s-1}}{\mathrm{EBIT}_t}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)}{\sigma}\right).
\end{aligned}
\tag{D.1.1}
$$

Die Brownsche Bewegung W_{s-t} ist normalverteilt mit $W_{s-t} \sim N(0; s-t)$. Unter Verwendung der z-Transformation der Standardnormalverteilung $z_i = \frac{x_i - E[x_i]}{\sigma_{x_i}}$ kann Gleichung (D.1.1) zu

$$
\begin{aligned}
P^D&\left(\frac{W_{s-t} - 0}{\sqrt{s-t}} < \frac{\ln\left(\frac{(e^{r_D}-1)\cdot D_{s-1}}{\mathrm{EBIT}_t}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}\right) \\
&= N\left(\frac{\ln\left(\frac{(e^{r_D}-1)\cdot D_{s-1}}{\mathrm{EBIT}_t}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}\right)
\end{aligned}
\tag{D.1.2}
$$

umgeformt werden. Die Gleichung ist im Zeitpunkt t bei bekanntem r_D und D_{s-1} immer lösbar.[1]

[1] Die Herleitung wurde allgemein zum Zeitpunkt t für die Ausfallwahrscheinlichkeit in s hergeleitet. Im Modell stellt Gleichung (6.2.10) im Zeitpunkt $t-1$ die Ausfallwahrscheinlichkeit in t dar.

D.1.2 Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit unter wertorientierter Verschuldungspolitik

Um zu zeigen, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit unter wertorientierter Verschuldungspolitik unter der Annahme des Insolvenzkriteriums gemäß Gleichung (6.2.9) durch (6.2.11) gegeben ist, muss zunächst ein Zusammenhang zwischen EBIT_t und D_t gefunden werden. Zwischen EBIT_t und EBIT_s, mit $s \geq t$, gilt unter Verwendung von Gleichung (6.2.1) in einem zeitstetigen Modellrahmen der Zusammenhang

$$E[\text{EBIT}_s] = \text{EBIT}_t \cdot e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)}. \tag{D.1.3}$$

Weiterhin gilt für den Wert des Fremdkapitals

$$D_t = l \cdot V_t^L = \frac{l \cdot V_t^U}{1 - l \cdot \tau \cdot \frac{r_D \cdot (1 + r_\tau^u)}{r_\tau^u \cdot (1 + r_D)}}, \tag{D.1.4}$$

wobei der Wert eines unverschuldeten Unternehmens V_t^U bestimmt wird durch

$$V_t^U = (1 - \tau) \sum_{k=t+1}^{T} E\left[\text{EBIT}_t\right] \cdot e^{\left(-r_\tau^u + \mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(k-t)}. \tag{D.1.5}$$

Insbesondere wird hierbei auf die Annahme zurückgegriffen, dass das zu bewertende Unternehmen einen gleichbleibenden Vermögensstand besitzt.

Durch Einsetzen von (D.1.5) in (D.1.4) ergibt sich für den Zusammenhang zwischen EBIT_s und D_s

$$\begin{aligned} D_s &= \Gamma_s \cdot \text{EBIT}_s \\ \text{mit} \quad \Gamma_s &= \frac{l(1-\tau) \cdot \sum_{k=s+1}^{T} e^{\left(-r_\tau^u + \mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(k-s)}}{1 - l \cdot \tau \cdot \frac{r_D \cdot (1 + r_\tau^u)}{r_\tau^u \cdot (1 + r_D)}} \end{aligned} \tag{D.1.6}$$

Unter Verwendung von Gleichung (D.1.6) ist es nun möglich die Insolvenzwahrscheinlichkeit für wertorientierte Verschuldungspolitik zu bestimmen, wenn als Insolvenzauslöser die Zahlungsunfähigkeit gemäß Gleichung (6.2.9) definiert ist. Der Insolvenzauslöser Zahlungsunfähigkeit lässt sich in Verbindung mit Gleichung (D.1.6) umformen in:

$$(1+\Gamma_s)\cdot \mathrm{EBIT}_s < e^{r_D}\cdot D_{s-1}. \tag{D.1.7}$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Zahlungsunfähigkeit ist dann gegeben durch

$$P^D\left((1+\Gamma_s)\cdot \mathrm{EBIT}_s < e^{r_D}\cdot D_{s-1}\right) \tag{D.1.8}$$

und kann analog zur Vorgehensweise bei autonomer Verschuldungspolitik umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} & P^D\left((1+\Gamma_s)\cdot \mathrm{EBIT}_s < e^{r_D}\cdot D_{s-1}\right) && \text{(D.1.9)}\\ & = N\left(\frac{\ln\left(\frac{e^{r_D}\cdot D_{s-1}}{(1+\Gamma_t)\cdot \mathrm{EBIT}_t}\right)-\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}\right) && \text{(D.1.10)}\\ \text{mit}\ \ \Gamma_t & = \frac{l(1-\tau)\cdot\sum_{k=t+1}^{T} e^{\left(-r_\tau^u+\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(k-t)}}{1-l\cdot\tau\cdot\frac{r_D\cdot(1+r_\tau^u)}{r_\tau^u\cdot(1+r_D)}}. && \text{(D.1.11)} \end{aligned}$$

Die Gleichung ist im Zeitpunkt t bei bekanntem r_D und D_{s-1} lösbar.[2]

[2]Die Herleitung wurde allgemein zum Zeitpunkt t für die Ausfallwahrscheinlichkeit in s hergeleitet. Im Modell stellt Gleichung (6.2.11) im Zeitpunkt $t-1$ die Ausfallwahrscheinlichkeit in t dar.

D.2 Herleitungen zu den Bewertungsgleichungen

D.2.1 Tax Shield ohne Berücksichtigung der Zinsschranke und Insolvenz

In diesem Abschnitt wollen wir den Ausdruck C aus der Bewertungsgleichung für das periodengerechte Tax Shield ohne Berücksichtigung von Zinsschranke und Insolvenz für den allgemeinen Fall bei Betrachtung des Zeitraums von t bis T herleiten. Später nehmen wir diesbezüglich eine Einschränkung vor.

Sei W_t, mit $0 \leq t \leq T$, eine Brownsche Bewegung unter dem tatsächlichen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$[3]. Der stochastische Prozess zur Modellierung des EBITDA sei gegeben durch (6.2.1). Unter dem zu $\mathbb{P}$ äquivalenten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$[4] kann der EBITDA-Prozess umgeformt werden zu

$$\mathrm{EBITDA}_T = \mathrm{EBITDA}_t \cdot e^{\left(\left(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma \cdot W^*_{T-t}\right)}, \tag{D.2.1}$$

wobei W^*_{T-t} eine Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$[5] darstellt. Unter Verwendung von diesen Maßgaben kann die Auszahlungsfunktion des Calls $\max\left(0; \mathrm{EBITDA}_T - \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{r_D} - 1) \cdot D_{T-1}\right)$ aus Gleichung (6.3.2) für den Auszahlungszeitpunkt T durch

$$C = e^{-r_f(T-t)} E_{\mathbb{Q}}\left[\max\left(0; \mathrm{EBITDA}_T - \underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot (e^{r_D} - 1) \cdot D_{T-1}}_{=X}\right)\right] \tag{D.2.2}$$

bewertet werden.

Sei $f_{\mathbb{Q}}(\mathrm{EBITDA}_T)$ die Dichtefunktion von EBITDA_T unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann kann unter Verwendung der Eigenschaft, dass die Zufallsvariable

[3] Auf eine exakte Beschreibung des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ soll hier aus Vereinfachungsgründen durch verzichtet werden. Dabei ist Ω die Ergebnismenge aller möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments, $\mathcal{F}$ die σ-Algebra aller Teilmengen von Ω, deren Wahrscheinlichkeiten definiert sind und $\mathbb{P}$ das tatsächliche Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}$. Vgl. *Shreve* (2004), S. 94 ff.

[4] Dann ist der diskontierte EBITDA-Prozess $\{e^{-r_f t}\mathrm{EBITDA}_t; 0 \leq t \leq T\}$ ein Martingal.

[5] Oder auch detaillierter bezeichnet durch $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.

EBITDA_T log-normalverteilt ist, die folgende Dichtefunktion aufgestellt werden:

$$f_{\mathbb{Q}}(\text{EBITDA}_T) = \frac{1}{\text{EBITDA}_T \cdot \sqrt{2\pi \cdot \sigma^2(T-t)}} e^{\left(-\frac{\left(\ln \text{EBITDA}_T - \left(\ln \text{EBITDA}_t + \left(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)\right)^2}{2 \cdot \sigma^2 (T-t)}\right)}. \tag{D.2.3}$$

Unter Verwendung dieser Dichtefunktion kann der Erwartungswert aus (D.2.2) umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} &E_{\mathbb{Q}}\left[\max\left(0; \text{EBITDA}_T - X\right)\right] \\ &\quad = \int_X^\infty \left(0; \text{EBITDA}_T - X\right) f_{\mathbb{Q}}(\text{EBITDA}_T) d\text{EBITDA}_T \end{aligned} \tag{D.2.4}$$

Unter Verwendung von (D.2.4) kann (D.2.2) zu

$$C = e^{-r_f(T-t)} \int_X^\infty \left(\text{EBITDA}_T - X\right) f_{\mathbb{Q}}(\text{EBITDA}_T) d\text{EBITDA}_T \tag{D.2.5}$$

umgeformt werden. Die logarithmierte Zufallsvariable EBITDA_T ist normalverteilt mit $\ln \text{EBITDA}_T \sim N\left(\ln \text{EBITDA}_t + \left(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t); \sigma^2(T-t)\right)$. Unter Verwendung der Z-Transformation

$$EB = \frac{\ln \text{EBITDA}_T - \left(\ln \text{EBITDA}_t + \left(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

kann EBITDA_T in eine standardnormalverteilte Zufallsvariable EB übertragen werden. Es ist möglich (D.2.5) als

$$\begin{aligned} C = e^{-r_f(T-t)} &\int_{\frac{\ln X - \left(\ln \text{EBITDA}_t + \left(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^\infty \\ &\left(e^{EB\sigma\sqrt{T-t} + \left(\ln \text{EBITDA}_t + \left(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)} - X\right) \varphi\left(EB\right) dEB \end{aligned}$$

zu schreiben, wobei $\varphi(EB) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{EB^2}{2}}$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Dieser Ausdruck kann in zwei Integrale zerlegt werden. Wir widmen uns zunächst der Lösung des Ersten und komplexeren:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= e^{-r_f(T-t)} \\
&\quad \int_{\frac{\ln X-\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty} e^{EB\sigma\sqrt{T-t}+\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)}\varphi\left(EB\right)dEB \\
&= e^{-r_f(T-t)+\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)} \\
&\quad \int_{\frac{\ln X-\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty} e^{EB\sigma\sqrt{T-t}}\varphi\left(EB\right)dEB \\
&= e^{\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)} \int_{\frac{\ln X-\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty} e^{EB\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{EB^2}{2}}dEB \\
&= e^{\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)} \int_{\frac{\ln X-\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(EB-\sigma\sqrt{T-t})^2-\sigma^2(T-t)}{2}}dEB \\
&= \mathrm{EBITDA}_t \int_{\frac{\ln X-\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(EB-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}}dEB \\
&= \mathrm{EBITDA}_t \int_{\frac{\ln X-\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{EB^2}{2}}dEB \\
&= \mathrm{EBITDA}_t \int_{-\infty}^{-\frac{\ln X-\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}+\sigma\sqrt{T-t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{EB^2}{2}}dEB
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung der Symmetrieeigenschaft der Standardnormalverteilung gilt weiter:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \mathrm{EBITDA}_t N\left(\frac{-\ln X+\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}+\sigma\sqrt{T-t}\right) \\
&= \mathrm{EBITDA}_t N\left(\frac{\ln\frac{\mathrm{EBITDA}_t}{X}+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}+\sigma\sqrt{T-t}\right) \\
&= \mathrm{EBITDA}_t N\left(\frac{\ln\frac{\mathrm{EBITDA}_t}{X}+\left(r_f+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned}
$$

Die Lösung des zweiten Integrals lautet:

$$
\begin{aligned}
C_2 &= Xe^{-r_f(T-t)} \int_{\frac{\ln X-\left(\ln \mathrm{EBITDA}_t+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty} -1\varphi\left(EB\right)dEB \\
&= Xe^{-r_f(T-t)} N\left(\frac{\ln\frac{\mathrm{EBITDA}_t}{X}+\left(r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung von C_1, C_2, $X = \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{r_D} - 1) \cdot D_{T-1}$ und $T = t + 1$ erhalten wir die Lösung für den Ausdruck C aus Gleichung (6.3.4):

$$C = \text{EBITDA}_t \cdot N(d_1) + \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{r_D} - 1) \cdot D_t \cdot e^{-r_f} \cdot N(d_2), \tag{D.2.6}$$

wobei $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{\text{EBITDA}_t}{\frac{1}{\alpha}\cdot(e^{r_D}-1)\cdot D_t}\right)+\left(r_f+\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}$ und $d_2 = d_1 - \sigma$.

Die Gleichung ist lösbar, sofern EBITDA_t und D_t bekannt sind.

D.2.2 Tax Shield mit Berücksichtigung von Insolvenz

In diesem Abschnitt wird unter Rückgriff auf die Ergebnisse von Anhang D.2.1 kurz erläutert, wie der Ausdruck C^{Inso} aus der Bewertungsgleichung für das periodengerechte Tax Shield mit Berücksichtigung von Insolvenz abgeleitet werden kann, wobei die Steuerersparnisse in $t + 1$ (nächstes Jahr) realisiert werden.

Die Auszahlungsfunktion (6.3.6) ist im Vergleich zu Gleichung (6.3.1) um die charakteristischen Funktion $\mathbb{1}$ und im Zeitverlauf veränderliche, risikoangepasste Fremdkapitalkosten $r_{D,t}$ erweitert worden. Die charakteristischen Funktion $\mathbb{1}$ ist nicht in der Maximum-Funktion enthalten und ist deshalb für die Berechnung von C^{Inso} nicht relevant. Da $r_{D,t}$ und D_t in t bekannte Größen darstellen, ist unter Verwendung einer zu Anhang D.2.1 analogen Vorgehensweise, der Wert der Call-Option C^{Inso} mit dem Strike $X = \frac{1}{\alpha}\cdot(e^{r_{D,t}}-1)\cdot D_t$ folgenderweise zu berechnen:

$$\begin{aligned} C^{\text{Inso}} &= e^{-r_f} \int_X^\infty (\text{EBITDA}_T - X)\, f_{\mathbb{Q}}(\text{EBITDA}_T) d\text{EBITDA}_T \\ &= \text{EBITDA}_t \cdot N(d_1^{\text{Inso}}) + \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{r_{D,t}} - 1) \cdot D_t \cdot e^{-r_f} \cdot N(d_2^{\text{Inso}}), \end{aligned} \tag{D.2.7}$$

wobei $d_1^{\text{Inso}} = \frac{\ln\left(\frac{\text{EBITDA}_t}{\frac{1}{\alpha}\cdot(e^{r_{D,t}}-1)\cdot D_t}\right)+\left(r_f+\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}$ und $d_2^{\text{Inso}} = d_1^{\text{Inso}} - \sigma$.

D.2.3 Tax Shield mit Berücksichtigung von Insolvenz und der Zinsschranke

Die zusätzliche Berücksichtigung der Zinsschranke erfordert eine weitere Anpassung des Strikes X. Dieser ist um ZV_t und $\frac{1}{\min(0{,}3;\alpha)}$ zu adjustieren. ZV_t ist zum Zeitpunkt t bereits bekannt, daher kann der Wert der Call-Option $C^{\text{ZS,Inso}}$ mit Strike $X =$

$\frac{1}{\min(0{,}3;\alpha)}\left(e^{r_{D,t}}-1\right)D_t+ZV_t$ wieder durch lösen des Integrals

$$C^{\text{ZS,Inso}}=e^{-r_f}\int_X^\infty\left(\text{EBITDA}_T-X\right)f_{\mathbb{Q}}(\text{EBITDA}_T)d\text{EBITDA}_T \tag{D.2.8}$$

bestimmt werden. Es ergibt sich für $C^{\text{ZS,Inso}}$

$$\begin{aligned}C^{\text{ZS,Inso}}&=\text{EBITDA}_t\cdot N(d_1^{\text{ZS}})\\&\quad+\left(\frac{1}{\min(0,3;\alpha)}\cdot(e^{r_{D,t}}-1)\cdot D_t+ZV_t\right)\cdot e^{-r_f}\cdot N(d_2^{\text{ZS}})\end{aligned} \tag{D.2.9}$$

mit $d_1^{\text{ZS}}=\frac{\ln\left(\frac{\text{EBITDA}_t}{\frac{1}{\min(0,3;\alpha)}\cdot(e^{r_{D,t}}-1)\cdot D_t+ZV_t}\right)+\left(r_f+\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}$ und $d_2^{\text{ZS}}=d_1^{\text{ZS}}-\sigma$.

Werden die Fremdkapitalzinsen als konstant angenommen, vereinfacht sich Gleichung (D.2.9) zu

$$\begin{aligned}C^{\text{ZS}}&=\text{EBITDA}_t\cdot N(d_1^{\text{ZS}})\\&\quad+\left(\frac{1}{\min(0,3;\alpha)}\cdot(e^{r_D}-1)\cdot D_t+ZV_t\right)\cdot e^{-r_f}\cdot N(d_2^{\text{ZS}}),\end{aligned} \tag{D.2.10}$$

wobei auch in d_1^{ZS} und d_2^{ZS} $r_{D,t}=r_D$ zu setzen sind.

Literaturverzeichnis

Arnold, Sven und *Lahmann, Alexander* (2010), Bewertung der Zinsschranke, verfügbar bei `http://ssrn.com/abstract=1567523`.

Arnold, Sven/ Lahmann, Alexander und *Schwetzler, Bernhard* (2012), Tax Shield, Insolvenzwahrscheinlichkeit und Zinsschranke – eine empirische Analyse, in: Die Wirtschaftsprüfung, Jg. 65, S. 324–337.

Arnold, Sven/ Lahmann, Alexander D. F. und *Schwetzler, Bernhard* (2011a), Der Einfluss der "Zinsschranke" auf den Unternehmenswert - Eine Anmerkung -, in: Corporate Finance biz, Jg. 2, S. 293–299.

Arnold, Sven/ Lahmann, Alexander D. F. und *Schwetzler, Bernhard* (2011b), Zinsschranke, Unternehmensbewertung und APV-Ansatz - eine Anmerkung zum Beitrag von Förster/Stöckl/Brenken (ZfB 2009, S. 985 ff.), in: arqus-Working Paper Nr. 116.

Arzac, Enrique R. und *Glosten, Lawrence R.* (2005), A Reconsideration of Tax Shield Valuation, in: European Financial Management, Jg. 11, S. 453–461.

Ayers, Benjamin C./ LaPlante, Stacie Kelley und *McGuire, Sean T.* (2010), Credit Ratings and Taxes: The Effect of Book–Tax Differences on Ratings Changes, in: Contemporary Accounting Research, Jg. 27, S. 359–402.

Bachmann, Carmen und *Schultze, Wolfgang* (2008), Unternehmensteuerreform 2008 und Unternehmensbewertung - Auswirkungen auf den Steuervorteil der Fremdfinanzierung von Kapitalgesellschaften, in: Die Betriebswirtschaft, Jg. 68, S. 9–34.

Bhanot, Karan und *Mello, Antonio S.* (2006), Should corporate debt include a rating trigger?, in: Journal of Financial Economics, Jg. 79, S. 71–98.

DeAngelo, Harry und *Masulis, Ronald W.* (1980), Leverage and dividend irrelevancy under corporate and personal taxation, in: Journal of Finance, Jg. 35, S. 453–467.

Eberl, Stephan (2009), Weitere Erkenntnisse zum Steuervorteil von Fremdkapital nach der Unternehmensteuerreform 2008, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 61, S. 251–282.

Fischer, Edwin O./ Heinkel, Robert und *Zechner, Josef* (1989), Dynamic Capital Structure Choice: Theory and Tests, in: Journal of Finance, Jg. 44, S. 19–40.

Förster, Heinrich H./ Stöckl, Stefan und *Brenken, Henner* (2009), Die Bedeutung der Zinsschranke für die Bewertung von Tax Shields in einem modifizierten APV-Ansatz unter Verwendung einer entsprechend angepassten Eigenkapitalkosten-Reaktionshypothese, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 79, S. 985–1018.

Frühling, Volker (2009), Unternehmensbewertung und ewige Rente, in: Finanzbetrieb, Jg. 11, S. 200–203.

Goldstein, Robert/ Ju, Nengjiu und *Leland, Hayne* (2001), An EBIT-Based Model of Dynamic Capital Structure, in: Journal of Business, Jg. 74, S. 483–512.

Hackbarth, Dirk/ Hennesy, Christopher A. und *Leland, Hayne E.* (2007), Can the Trade-off Theory Explain Debt, in: Review of Financial Studies, Jg. 20, S. 1389–1428.

Harrison, J. Michael und *Kreps, David M.* (1979), Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, in: Journal of Economic Theory, Jg. 20, S. 381–408.

Haug, Espen Gaarder (2007), The Complete Guide to Option Pricing Formulas, 2 Aufl., McGraw-Hill, New York.

Homburg, Carsten/ Stephan, Jörg und *Weiß, Matthias* (2004), Unternehmensbewertung bei atmender Finanzierung und Insolvenzrisiko, in: Die Betriebswirtschaft, Jg. 64, S. 276–295.

Kaplan, Robert S. und *Urwitz, Gabriel* (1979), Statistical Models of Bond Ratings: A Methodological Inquiry, in: Journal of Business, Jg. 52, S. 231–261.

Kessler, Wolfgang und *Dietrich, Marie-Louise* (2010), Die Zinsschranke nach dem WaBeschG - la dolce vita o il dolce far niente?, in: Der Betrieb, Jg. 05, S. 240–245.

Kruschwitz, Lutz und *Löffler, Andreas* (2005), Ein neuer Zugang zum Konzept des Discounted Cashflows, in: Journal für Betriebswirtschaft, Jg. 55, S. 21–36.

Kruschwitz, Lutz/ Lodowicks, Arnd und *Löffler, Andreas* (2005), Zur Bewertung insolvenzbedrohter Unternehmen, in: Die Betriebswirtschaft, Jg. 65, S. 221–236.

Kruschwitz, Lutz und *Löffler, Andreas* (2006), Discounted Cash Flow - A Theory of the Valuation of Firms, 1 Aufl., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester.

Laitenberger, Jörg und *Löffler, Andreas* (2006), The structure of the distributions of cash flows and discount rate in multiperiod valuation problems, in: OR Spectrum, Jg. 28, S. 289–299.

Lenz, Martin und *Dörfler, Oliver* (2010), Die Zinsschranke im internationalen Vergleich, in: Der Betrieb, Jg. 01, S. 18–24.

Lodowicks, Arnd (2007), Riskantes Fremdkapital in der Unternehmensbewertung. Bewertung von Insolvenzkosten durch Barrier-Optionen unter Verwendung der Discounted-Cash-Flow Theorie, Freie Universität Berlin, Diss., Wiesbaden.

Mai, Jan M. (2008), Die Bewertung verschuldeter Unternehmen unter Berücksichtigung von Zinsabzugsbeschränkungen, in: Die Betriebswirtschaft, Jg. 68, S. 35–51.

Massari, Mario/ Roncaglio, Francesco und *Zanetti, Laura* (2007), On the Equivalence between the APV and the wacc Approach in a Growing Leveraged Firm, in: European Financial Management, Jg. 14, S. 152–162.

Miles, James A. und *Ezzell, John R.* (1980), The Weighted Average Cost of Capital, Perfect Capital Markets, and Project Life: A Clarification, in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, Jg. 15, S. 719–730.

Modigliani, Franco und *Miller, Merton H.* (1963), Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: A Correction, in: American Economic Review, Jg. 53, S. 433–443.

Myers, Stewart C. (1974), Interactions of Corporate Financing and Investment Decisions-Implications for Capital Budgeting, in: Journal of Finance, Jg. 29, S. 1–25.

Pasedaq, Andreas (2010), Paradoxe Wirkungen der Zinsschranke, in: Corporate Finance biz, Jg. 1, S. 301–311.

Piehler, Maik und *Schwetzler, Bernhard* (2010), Der Wert ertragsteuerlicher Verlustvorträge, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 62, S. 60–100.

Rapp, Marc S. (2006), Die arbitragefreie Adjustierung von Diskontierungssätzen bei einfacher Gewinnsteuer, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 58, S. 771–806.

Schwetzler, Bernhard (2000), Unternehmensbewertung unter Unsicherheit - Sicherheitsäquivalent- oder Risikozuschlagsmethode?, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 52, S. 469–486.

Shreve, Steven E. (2004), Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models (Springer Finance), 1. Aufl., Springer, New York.

Streitferdt, Felix (2010), Die Bewertung von Verlustvorträgen und Tax Shields auf arbitragefreien Märkten, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 80, S. 1041–1074.

Streitferdt, Felix und *Meitner, Matthias* (2011), Unternehmensbewertung unter Berücksichtigung der Zinsschranke, in: Corporate Finance biz, Jg. 2, S. 258–269.

United States Securities and Exchange Commission (Hg.) (2003), Report on the Role and Function of Credit Rating Agencies in the Operation of the Securities Markets.

7 Tax Shield, Insolvenzwahrscheinlichkeit und Zinsschranke - eine empirische Analyse

Inhaltsverzeichnis

Tax Shield, Insolvenzwahrscheinlichkeit und Zinsschranke - eine empirische Analyse

Sven Arnold, Alexander Lahmann und Bernhard Schwetzler*

* Dipl.-Math. (FH) Sven Arnold, Dipl.-Vw. Alexander Lahmann, Prof. Dr. Bernhard Schwetzler, Alle Lehrstuhl für Finanzmanagement und Banken, HHL Leipzig Graduate School of Management, Jahnallee 59, 04109 Leipzig. Der Artikel wurde mit geringen Anpassungen in “Die Wirtschaftsprüfung” (6/2012, S. 324 - 337) veröffentlicht.

8 Zur Überprüfung von Kapitalstrukturtheorien in einer von Krisen geprägten Zeit

Inhaltsverzeichnis

Zur Überprüfung von Kapitalstrukturtheorien in einer von Krisen geprägten Zeit

Sven Arnold, Alexander Lahmann und Jens Reinstädt*

* Dipl.-Math. (FH) Sven Arnold, Dipl.-Vw. Alexander Lahmann, beide Lehrstuhl für Finanzmanagement und Banken, HHL Leipzig Graduate School of Management, Jahnallee 59, 04109 Leipzig. Dipl-Bw. (BA) Jens Reinstädt, MBA Infineon Technologies AG, München. Der Artikel wurde mit geringen Anpassungen in der Zeitschrift "Corporate Finance biz" (8/2011, S. 449 - 458) veröffentlicht. Die Seiten 252 bis 290 dieser Dissertationsschrift wurden zur Wahrung des Copyrights aus dieser Online-Version entfernt.

9 Multiples und Beta-Faktoren für deutsche Branchen - Erläuterungen zu den Kapitalmarktdaten von www.finexpert.info und CORPORATE FINANCE

Inhaltsverzeichnis

Multiples und Beta-Faktoren für deutsche Branchen - Erläuterungen zu den Kapitalmarktdaten von www.finexpert.info und CORPORATE FINANCE

Sven Arnold, Alexander Lahmann und Bernhard Schwetzler*

* Dipl.-Math. (FH) Sven Arnold, Dipl.-Vw. Alexander Lahmann, Prof. Dr. Bernhard Schwetzler, Alle Lehrstuhl für Finanzmanagement und Banken, HHL Leipzig Graduate School of Management, Jahnallee 59, 04109 Leipzig. Der Artikel wurde mit geringen Anpassungen in der Zeitschrift “Corporate Finance biz” (7/2011, S. 430 - 434) veröffentlicht.

LEIPZIG
GRADUATE SCHOOL
OF MANAGEMENT